WWW.MOHANDESYAR.COM

بسم الله الرحمن الرحیم

نام جزوه: آمار و احتمالات مهندسی

مدرس: دکتر مصطفی رزمخواه

نویسنده: افسانه قارونی

تهیه و تنظیم: مصطفی خانیکی

نیم سال دوم ۸۹–۱۳۸۸

دانشگاه فردوسی مشهد – دانشکده مهندسی

گروه مهندسی برق

WWW.MOHANDESYAR.COM

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date ( )

رزمخواه

سرفصل آمار و احتمال — منابع — (بهبودیان x کرمانی)

۱- احتمال — ۱- مقدمه‌ای بر آمار و احتمال برای مهندسان و محققان علوم

۲- متغیرهای تصادفی — تالیف: والپل — ترجمه: دکتر مجید اسدی و ابوالقاسم بزرگ‌نیا

۳- توزیع‌های خاص احتمالی — ۲- مقدمه‌ای بر آمار ریاضی — تالیف والپل و فروند — پیچیده‌تر

۴- نمونه‌گیری و برآورد — ۳- مفاهیم و روش‌های آماری (هر دو جلد)

۵- آزمون فرضیه‌های آماری — تالیف: باتاچاریا — ترجمه: مرتضی ابن‌شهرآشوب و فتاح میکائیلی

میان ترم ۸-۹ (هفته آخر فروردین یکشنبه) — ۴- آمار و کاربرد آن در مدیریت ← مسئله زیاد و ساده

پایان ترم ۱۲-۱۴ — تالیف: دکتر عادل آذر

← تمرین‌های کلاس مهم‌اند!

فصل اول:

آزمایش تصادفی: آزمایشی است که نتیجه‌ی آن از قبل معلوم نباشد.

فضای نمونه‌ای آزمایش: به مجموعه‌ی کلیه‌ی حالات ممکن رخداد یک آزمایش تصادفی، فضای نمونه‌ی آن آزمایش گفته می‌شود و آن را معمولاً با S نشان می‌دهیم. مثلاً در آزمایش پرتاب سکه: $S=\{\text{خط}, \text{شیر}\}$

پیشامد تصادفی: به هر یک از زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ی یک آزمایش تصادفی گفته می‌شود. 2^2 (2^n)

STAEDTLER®

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date (

اعمال روی پیشامدها: متمم، اجتماع، اشتراک، تفاضل، تفاضل متقارن

پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B را که اشتراکی نداشته باشند ناسازگار می‌گوییم یعنی:

$A \cap B = \emptyset$ ← سه پیشامد ناسازگار ...

* سه " دو به دو " ...

افراز فضای نمونه: مجموعه‌های $A_1, A_2, \dots, A_n$ را یک افراز برای فضای نمونه‌ای S می‌گوییم هرگاه:

الف) $S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ب) A_i ها دو به دو ناسازگار باشند یعنی $A_i \cap A_j = \emptyset \; ; i \neq j$

قوانین احتمال:

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ← به شرط همشانسی ... یکنواخت

طول / سطح / فضای نمونه‌ای

1) $\forall A \in S \; ; \; 0 \leq P(A) \leq 1$ (تعریف احتمال)

2) $P(\emptyset) = 0$

نکته: توجه شود که هر پیشامدی با احتمال صفر لزوماً تهی نیست. $P(A) = 0 \not\Rightarrow A = \emptyset$

مثال: احتمال رخداد یک نقطه وقتی فضای نمونه بازه‌ای از اعداد حقیقی باشد (یعنی طول داشته باشد) صفر است.

3) پیشامد قطعی (حتمی) $P(S) = 1$

4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

STAEDTLER®

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

۶) اگر $A_1, \dots, A_n$ پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند آنگاه: $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

۷) $P(A^c) = 1 - P(A)$

۸) $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$ $\quad A-B = A \cap B'$

اثبات: $A = \underbrace{(A-B)}_{\text{ناسازگارند}} \cup \underbrace{(A \cap B)}_{} \longrightarrow \dots$

جلسه دوم:

تعریف احتمال: احتمال عددی است بین ۰ و ۱ که میزان عدم قطعیت رخداد پیشامدها را مشخص می‌کند.

اگر فضای نمونه‌ی آزمایش تصادفی مجموعه‌ای از اعداد یا اشیا باشد، آنگاه رخداد پیشامد آن به صورت احتمال زیر محاسبه می‌شود:

$$\star\ P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

که در آن منظور از $n(A)$ تعداد اعضای پیشامد A است.

اگر فضای نمونه بازه‌ای از اعداد حقیقی باشد، آنگاه احتمال رخداد A می‌شود: $P(A) = \frac{\text{طول } A}{\text{طول } S}$

قانون احتمال شرطی: اگر از رخداد پیشامدی مانند B مطلع باشیم و بخواهیم احتمال رخداد پیشامد دیگری را محاسبه کنیم از فرمول شرطی زیر استفاده می‌کنیم.

$$P(A/B) \overset{\star}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A/B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{n(B)/n(S)} \overset{\star}{=} \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

مثل اینکه فضای نمونه B باشد!

STAEDTLER®
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date (

مثال: اگر بدانیم در آزمایش پرتاب یک تاس خال شده زوج است، چقدر احتمال دارد آن خال ۲ باشد؟ چقدر احتمال دارد آن خال ۳ باشد؟ $\frac{1}{3}$ ، صفر

قانون ضرب احتمال: برای هر دو پیشامد A و B داریم:

$$P(A\cap B) = P(B)\,P(A|B)$$

$$P(A\cap B) = P(A)\,P(B|A)$$

همچنین برای سه پیشامد A، B و C می‌توان نوشت:

$$P(A\cap B\cap C) = P(A)\,P(B|A)\,P(C|A\cap B)$$

$$= P(B)\,P(C|B)\,P(A|B\cap C) = \dots$$

مثال: از ظرفی محتوی ۴ مهره‌ی سفید، ۶ مهره‌ی سیاه و ۵ مهره‌ی قرمز است، ۳ مهره به تصادف و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم چقدر احتمال دارد هر سه مهره سفید باشد؟

(با جایگذاری ← مستقل)

ب- مهره‌ها به ترتیب سفید، سیاه و قرمز باشند؟

حل الف- پیشامد اینکه مهره‌ی i ام سفید باشد A_i ، $i=1,2,3$

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)\,P(A_3|A_1\cap A_2) = \frac{4}{15}\times\frac{3}{14}\times\frac{2}{13}$$

حل ب- پیشامد اینکه مهره‌ی i ام سفید باشد A_i ، $i=1,2,3$

" " " " سیاه " B_i

" " " " قرمز " C_i

STAEDTLER®

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

$P(A_1 \cap B_2 \cap C_3) = P(A_1)\, P(B_2 | A_1)\, P(C_3 | A_1 \cap B_2) \overset{m.}{=} \frac{4}{15} \times \frac{6}{14} \times \frac{5}{13}$

استقلال پیشامدهای تصادفی.

دو پیشامد A و B را مستقل گوییم هرگاه رخداد یکی بر دیگری تأثیری نداشته باشد یعنی $P(A|B) = P(A)$

$P(B|A) = P(B)$

به عبارتی A و B را مستقل گوییم اگر و فقط اگر: $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$

نکته: پیشامدهای $A_1, \dots, A_n$ را مستقل گوییم اگر و تنها اگر: $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$

★ A و B و C دو به دو مستقل: $P(A \cap C) = P(A)\, P(C)$ $\quad P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$

$P(B \cap C) = P(B)\, P(C)$ ← ★ $P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B)\, P(C)$

قانون احتمال کل.

فرض کنید $A_1, \dots, A_n$ یک افراز از فضای نمونه S باشد و B نیز پیشامدی دلخواه در S باشد، در این صورت:

$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots (B \cap A_n) \Rightarrow P(B) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{P(B \cap A_i)}_{P(B|A_i)\,P(A_i)}$

قانون احتمال کل: $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$

قانون بیز: برای دو پیشامد A و B قانون بیز بیان می‌کند که:

STAEDTLER®
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

SUBJECT:

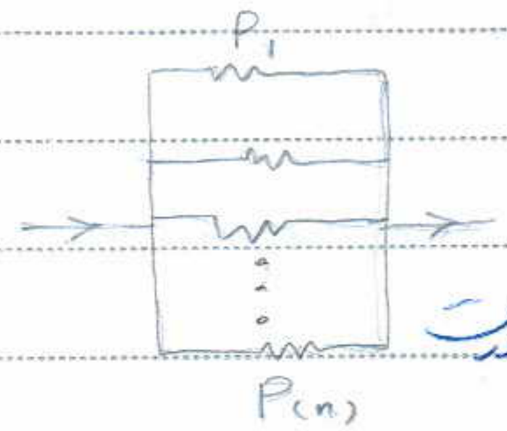
Year ( ) Month ( ) Date (

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \overset{*}{=} \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

اگر $A_1, \dots, A_n$ افرازی از فضای نمونه باشند، قانون بیز را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)} \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

مثال. یک سیستم موازی در نظر بگیرید که احتمال فعال بودن هر یک از مولفه‌های آن برابر P_i (که $i=1,\dots,n$) باشد، چقدر احتمال دارد سیستم عمل کند؟



حل. می‌دانیم در یک سیستم موازی مولفه‌ها مستقل از هم عمل می‌کنند و احتمال مطلوب به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(\text{حداقل یکی از مولفه‌ها سالم باشد}) \overset{*}{=} 1 - P(\text{هیچ کدام سالم نباشند})$$

$x \geq 1$ $\qquad x < 1 \equiv x = 0$

پیشاپیش اینکه معادلت iام سالم باشد: A_i

$$= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right) =$$

* A_iها مستقل اند پس A_i^cها هم مستقل اند

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(A_i^c) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \underbrace{P(A_i)}_{P_i}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P_i) \neq 1 - (1 - P_i)^n$$

حل دوم. (سخت‌تر ...)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

نکته. اگر A و B مستقل باشند آنگاه:

A و B' $\qquad$ A' و B $\qquad$ A' و B' نیز مستقل هستند.

STAEDTLER®

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

SUBJECT: ۵

Year ( ) Month ( ) Date ( )

حل: $S = \{$(شیر،شیر), خط،خط, شیر،خط, خط،شیر$\}$

X : ۲ ۰ ۱ ۱

$\Rightarrow R_X = \{0, 1, 2\}$ $\qquad P(X=x) = \begin{cases} 1/4 & x=0 \\ 1/2 & x=1 \\ 1/4 & x=2 \end{cases}$

+1

☆ تعریف: به تابع احتمال $P(X=x)$ تابع جرم احتمال متغیر تصادفی گسسته‌ی X می‌گوییم اگر:

الف) $0 \le P(X=x) \le 1 \quad \forall x \in R_X$

ب) $\sum_{x \in R_X} P(X=x) = 1$

STAEDTLER®

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

SUBJECT:
Year ( ) Month ( ) Date (

جلسه سوم :

امید ریاضی : (متوسط ...)

X بین یک جامعه است

مقدار مورد انتظار X / امید ریاضی

فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع جرم احتمال $P(X=x)$ باشد، در اینصورت، امید ریاضی X عبارتست از :

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} x \underbrace{P(X=x)}_{w_i}$$

تعداد +

کل جامعه

ملاحظه می‌شود که امید ریاضی متغیر تصادفی X که در بالا تعریف کردیم میانگین وزنی مقادیر متغیر تصادفی X است.

$x_1 \cdots x_n$, $w_1 \cdots w_n$, $\sum w_i = 1 \longrightarrow \bar{x}_w = \sum_1^n w_i x_i$

* نکته: امید ریاضی X یک مقدار ثابت است و به x بستگی ندارد.

مثال: در آزمایش دو بار پرتاب یک سکه متوسط تعداد شیرها را حساب کنید.

امید ریاضی

یعنی باید ابتدا X تعریف کنیم ...

$S = \{خ خ, ش خ, خ ش, ش ش\}$

$X: 0 \quad 1 \quad 2 \quad \cdots$

حل: X تعداد شیرها در دو بار پرتاب سکه پس: $R_X = \{0, 1, 2\}$

$$P(X=x) = \begin{cases} 1/4 & x = 0 \text{ یا } 2 \\ 1/2 & x = 1 \\ (a_0 \quad a_w)? \end{cases}$$

X	0	1	2
P(X=x)	1/4	1/2	1/4

$$\Rightarrow E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$$

(برای تعداد دفعات بیشتر E(X) بزرگتر)

تمرین - در مثال قبل فرض کنید y درآمد فرد A در یک بازی باشد که به طریق زیر مطرح می‌شود:

در دو بار پرتاب یک سکه اگر هر دو بار شیر ظاهر شود شخص A ، ۵ تومان از شخص B بگیرد، اگر یک خط یا دو خط ظاهر شود به ترتیب ۲ تومان و ۵ تومان به شخص B بدهد،

STAEDTLER®

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

نکته ۲: اگر $A_1, \dots, A_n$ پیشامدهای دو به دو مستقل باشند آنگاه هر ترکیبی از چندتای آن‌ها از هر ترکیبی دیگر از مابقی آن‌ها نیز مستقل است.

نتیجه: اگر $A_1, \dots, A_n$ مستقل باشند آنگاه $A'_1, \dots, A'_n$ هم از هم مستقل هستند.

تمرین: فرض کنیم ترکی دارای سه کارخانه است که به ترتیب درصد تولید و درصد کالاهای معیوب هر کارخانه در جدول زیر آمده است:

	درصد تولید	درصد معیوب
کارخانه‌ی ۱	۳۰٪	۲٪
۲ "	۴۵٪	۳٪ ⟶ $P(\text{تعلق به کارخانه‌ی ۲} \mid \text{معیوب})$
۳ "	۲۵٪	۴٪

☆ اگر کالای معیوب خریداری شود چه قدر احتمال دارد از دومی باشد؟ (با قانون بیز)

حل: اگر A پیشامد معیوب بودن کالا باشد و B_i پیشامد تعلق کالا به کارخانه‌ی i باشد:

$$P(B_2 \mid A) = \frac{P(A \mid B_2)P(B_2)}{\sum_{j=1}^{3} P(A \mid B_j)P(B_j)} \overset{☆}{=} \frac{\overbrace{0/03 \times 0/45}^{☆ \to (\text{نه} \dots)}}{0/02 \times 0/30 + 0/03 \times 0/45 + 0/04 \times 0/25} = \frac{27}{135}$$

$$= 0/3417 = 34/2\,\%$$

STAEDTLER®
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

فصل دوم : متغیرهای تصادفی

متغیر تصادفی . عملگری است که فضای نمونه‌ی آزمایش تصادفی را طبق تعریفی خاص به زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی می‌برد، به عبارتی یک متغیر تصادفی با نماد X تابعی است از S (دامنه‌ی تابع) به زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی مانند R_x (برد تابع)

$$X : S \longmapsto R_x \subseteq R$$

به R_x تکیه‌گاه متغیر تصادفی x نیز گفته می‌شود.

اگر R_x مجموعه‌ای شمارا باشد به x یک متغیر تصادفی گسسته و در غیر اینصورت به x یک متغیر تصادفی پیوسته می‌گوییم.

مثال . اگر $R_x = \{0, 1, 2\}$ باشد، x متغیر تصادفی گسسته و

$S = \{$خط ، شیر$\}$

$S = \{$خخ ، شخ ، خش ، شش$\}$

اگر $R_x = (0, 1)$ باشد، x متغیر تصادفی پیوسته است.

تابع جرم احتمال . یک متغیر تصادفی گسسته، هر یک از مقادیر تکیه‌گاه خود را با احتمال مشخصی اختیار می‌کند. به مجموعه‌ی این احتمالات تابع جرم احتمال آن متغیر تصادفی گفته می‌شود. $P(X = x)$

مثال . در آزمایش دوبار پرتاب یک سکه فرض کنید X نشانگر تعداد شیرها باشد، تابع جرم احتمال X را حساب کنید.

STAEDTLER®
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date ( )

متوسط درآمد شخص A را در هر بازی حساب کنید. ☆ (در چنین بازی اگر $E(X)$ صفر شود بازی عادلانه است)

تمرین ۲. فرض کنید درآمد شخص A در یک بازی دارای تابع جرم احتمال زیر باشد،

x	c	-2	10
$P(X=x)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

مقدار c را طوری تعیین کنید که این بازی یک بازی عادلانه باشد؟

نکته: منظور از بازی عادلانه بازی است که متوسط درآمد در آن صفر باشد.

حل تمرین ۱.

$S = \{$ش ش ، خ ش ، ش خ ، خ خ $\}$

X : 10 -2 -2 -5

X درآمد:

x	10	-2	-5
$P(X=x)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

$\Rightarrow E(x) = \frac{10}{4} - \frac{2}{2} - \frac{5}{4} \overset{?}{=} 0/25$

$\underbrace{100}_{\text{تکرار آزاد}} \times 0/25 = 250$ (درآمد) ...

تمرین ۲)

$E(x) = 0 \Rightarrow E(x) = -2 \times 1/2 + 10 \times 1/4 + c \times 1/4 = 0$

$\Rightarrow c = -6$

STAEDTLER®

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date (

واریانس: فرض کنید X دارای تابع جرم احتمال $P(X=x)$ باشد، در اینصورت واریانس x عبارت است از: (پراکندگی: بیان کننده پراکندگی)

$$\sigma_x^2 = Var(X) = E(x - E_x)^2$$

اگر E_x ثابت باشد $\Rightarrow Var(X) = E(x^2) - (EX)^2$

نکته ۱: واریانس یک متغیر تصادفی یک مقدار ثابت است.

$$E(x^2 + E_x^2 - 2xE_x) = Ex^2 - 2E_xE_x + (E_x)^2 = E_x^2 - (E_x)^2$$

خواص امید ریاضی و واریانس:

مقدار ثابت

1) $E(a) = a$

2) $E(ax) = aE(x)$

3) $E(ax+b) = aE(x) + b$

4) $E(ax+bY+C) = aE(x) + bE(y) + c$

1) $Var(a) = 0$

2) $Var(X) \geq 0$

3) $Var(aX) = a^2 Var(x)$

4) $Var(ax+b) = a^2 Var(X)$

تعریف انحراف معیار: انحراف معیار متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{Var(x)}$$

تمرین: در مثال ۴ ی قبل واریانس متغیر مورد مطالعه را حساب کنید.

نکته: فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع جرم احتمال $P(X=x)$ و g یک تابع حقیقی باشد در اینصورت:

* برای Var و ...

$$E(g(x)) = \sum_{x \in R_x} g(x) P(X=x)$$

STAEDTLER®

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

book: حالت دیگری برای Var ؟

- مثلاً برای $g(x)=x^2$ داریم:

$$E(X^2) = \sum_{x \in R_X} x^2 P(X=x)$$

در مثال ۱:

$$E(X^2) = 0 \times \tfrac{1}{4} + 1 \times \tfrac{1}{2} + 2^2 \times \tfrac{1}{4} = 1.5$$

ت. Var باید مثبت باشد.

$$\Rightarrow Var(X) = E(X^2) - (EX)^2 = 1.5 - 1 = 0.5$$

تابع توزیع احتمال (تابع احتمال تجمعی / انباشته)

فرض کنید X یک متغیر تصادفی باشد در این صورت تابع توزیع احتمال X در نقطه‌ی t به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F_X(t) = P(X \le t) = \sum_{x \le t} P(X=x)$$

مثال: در مثال ۱، تابع احتمال تجمعی X را حساب کنید. (دو بار پرتاب سکه ...)

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \tfrac{1}{4} & 0 \le t < 1 \\ \tfrac{3}{4} & 1 \le t < 2 \\ 1 & t \ge 2 \end{cases}$$

مثلاً ت. $\Rightarrow$ $\begin{cases} F_X(10) = 1 \\ F_{2.5} = 1 \\ F_{1.5} = 3/4 \end{cases}$

خواص تابع توزیع احتمال:

۱) تابع توزیع احتمال یک تابع غیرنزولی است.

۲) تابع توزیع احتمال در هر نقطه حداقل از راست پیوسته است.

۳) $F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

STAEDTLER®
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date (

۴) $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

نکته: اگر X گسسته باشد آنگاه $P(X=x) = F_X(x) - F_X(x^-)$ که در آن x^- نقطه‌ی قبل از x در تکیه‌گاه متغیر تصادفی X است.

★ متقی

★ تمرین: محاسبه‌ی واریانس: ۱) در مثال تمرین شیر ۴ دوبار پرتاب شد که:

$$var(x) = E(X - EX)^2 = E\underbrace{(X-1)^2}_{g(x)} = \sum_{x \in R_X} g(x) P(X=x) =$$

$$= 1 \times \tfrac{1}{4} + 0 + 1 \times \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}$$

روش ۲: $var(x) = E(X^2) - (EX)^2 = 1 \times \tfrac{1}{4} + (2)^2 \times \tfrac{1}{4} + 0 - 1 = \tfrac{1}{2}$ ✓

۲) مثال بازی: روش ۱: $var(x) = E(X - \tfrac{1}{4})^2 = (\tfrac{39}{4})^2 \times \tfrac{1}{4} + (\tfrac{-9}{4})^2 \times \tfrac{1}{2} + (\tfrac{-21}{4})^2 \times \tfrac{1}{4}$

$= 33.1875$

روش ۲: $var(x) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{100}{4} + \frac{4}{2} + \frac{25}{4} - \frac{1}{16} = 33.1875$ ✓

۳) مثال بازی عادلانه: روش ۱: $var(x) = E(X-0)^2 = E(X^2) - (\cancel{EX})^{0\,2} = \frac{36}{4} + \frac{4}{2} + \frac{100}{4} = 36$

روش ۲: $var(x) = E(X^2) - (EX)^2$ ✓

(تذکر: همچنین: $var(X) = E(X^2) - (EX)^2$ (روش ۲) book چون:

$$var(x) = E(X - EX)^2 = E(X^2 + \underbrace{EX^2}_{\text{عدد ثابت}} - 2XEX) \xlongequal[\text{امید ریاضی}]{\text{طبق خواص}} E(X^2) + (EX)^2 - 2EXEX$$

$$(= E(X^2) - (EX)^2 \quad ✓$$

STAEDTLER®

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

تابع چگالی احتمال:

تعریف: به تابع $f(x)$ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته X گوییم، هرگاه:

۱) $\forall x;\ f(x) \geq 0$

۲) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

نکته: اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد و a و b مقادیر ثابتی باشند آنگاه:

الف) $P(X=\alpha) = 0$

ب) $P(a<X<b) = \int_a^b f(x)\,dx$

امید ریاضی و واریانس:

فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد در اینصورت:

* $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$ $\qquad E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx$

یک تابع حقیقی

△ $Ex^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$

$Var(x) = E(x - Ex)^2 = E(x^2) - (Ex)^2$

STAEDTLER®
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date (

تابع توزیع احتمال:

اگر x یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال f(x) باشد آنگاه:

$$F_X(y) = P(X \le y) = \int_{-\infty}^{y} f(x)\,dx$$

نکته: اگر X (متغیر پیوسته‌ی تصادفی) دارای تابع توزیع احتمال $F_X(x)$ باشد، آنگاه:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

مثال:

فرض کنیم طول عمر یک قطعه‌ی الکترونیکی (X) دارای تابع توزیع احتمال زیر باشد:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\theta x} \quad (x > 0)$$

الف) این احتمال را حساب کنید که یک قطعه از این نوع کالا حداقل ۵ ساعت عمر کند.

ب) چه قدر احتمال دارد این قطعه ۲ ساعت عمر کند؟ * حل: $P(X=2) = 0$

ج) متوسط طول عمر این قطعه را حساب کنید.

د) واریانس طول عمر این قطعه را حساب کنید.

حل. الف. روش اول:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & ; x > 0 \\ 0 & ; o.w. \end{cases}$$

$$P(X \ge 5) = \int_5^{\infty} f_X(x)\,dx$$

$$\Rightarrow P(X = 5) = \int_5^{\infty} \theta e^{-\theta x}\,dx = -e^{-\theta x}\Big]_5^{\infty} = e^{-5\theta}$$

روش دوم:

$$P(X \ge 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - F_X(5) = 1 - (1 - e^{-\theta \times 5})$$
$$= e^{-5\theta}$$

STAEDTLER®

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

ص ج

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \overset{*}{=} \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x f(x)\, dx}_{0} + \int_{0}^{\infty} x f(x)\, dx$$

★ $\int_{-\infty}^{0} = 0$ چون $x>0$ داشتیم

$$= \int_{0}^{\infty} x\theta e^{-\theta x}\, dx \overset{\text{جزء به جزء}}{=} \frac{1}{\theta}$$

$\theta = 0.001$

تذکر: اگر $E_x = 1000$ شود یعنی عمر متوسط قطعه 1000 ساعت می‌باشد. (x در فرمول برحسب ساعت است)

ص د

$$E x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx \overset{\text{مشابه بالا}}{=} \int_{0}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} x^2 \theta e^{-x\theta} = \frac{2}{\theta^2}$$

$$\Rightarrow var(x) = E x^2 - (E_x)^2 = \frac{2}{\theta^2} - \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 = \frac{1}{\theta^2}$$

تذکر: اگر $\theta = 0.001$ واریانس 10^6 می‌شود.

مثال. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد: (دستگاهی محصولاتی تولید می‌کند که قبل از بازگیری به طور صد در صد بازرسی می‌شود و سپس اندازه‌گیری محصول طولی است که قادر به خواندن اعداد بین 1 و $\frac{4}{3}$ نیست. بعد از اندازه‌گیری، اندازه‌ای به دست آمده دارای چگالی زیر می‌باشند:)

$$f_X(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 \le x \le 1 \\ \boxed{1} & 1 < x \le \frac{4}{3} \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

الف) مطلوبست محاسبه‌ی k.

ب) چند درصد (احتمال) از محصولات خارج از فاصله‌ی صفر و یک قرار دارند؟

ج) امید ریاضی و واریانس این متغیر تصادفی را به دست آورید.

★ د) تابع توزیع احتمال این متغیر تصادفی را حساب کنید.

STAEDTLER®
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date (

حل الف: با توجه به خواص تابع چگالی داریم:

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0+\int_0^1 kx^2\,dx+\int_1^{4/3} 1\,dx$$

$$=\frac{k}{3}+\frac{1}{3}=\frac{k+1}{3} \Rightarrow k=2$$

i) $k \geq 0$ and ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

☆ جواب مسئله اشتراک این دو شرط است

حل ب:

$$P(X\notin(0,1)) = 1-P(0<X<1) = 1-\int_0^1 2x^2\,dx = 1/3 = 33\%$$

روش دوم:

$$P(X\notin(0,1)) = P(1<X<4/3) = \int_1^{4/3} 1\,dx = 1/3 = 33\%$$

$$= P(X\in(1,4/3))$$

حل ج:

$$E_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x f(x)\,dx}_{0} + \int_0^1 + \int_1^{4/3} + \underbrace{\int_{4/3}^{+\infty}}_{0}$$

$$= \int_0^1 x(2x^2)\,dx + \int_1^{4/3} x(1)\,dx = \int_0^1 2x^3\,dx + \int_1^{4/3} x\,dx = \frac{1}{2}+\frac{(4/3)^2-1}{2} = 8/9$$

یعنی متوسط اندازه ی قطعه ها $8/9$ است یعنی به طور متوسط اندازه ی هر قطعه $8/9$ است.

حل د:

$$F_X(y) = P(X\leq y) \overset{*}{=} \begin{cases} 0 & y<0 \\ \int_0^y 2x^2\,dx = 2y^3/3 & 0<y\leq 1 \\ \int_0^1 2x^2\,dx + \int_1^y 1\,dx = 2/3+y-1 & 1<y\leq 4/3 \\ 1 & y\geq 4/3 \end{cases}$$

تمرین: متغیر تصادفی X که نشان دهنده ی وزن یک کالا است دارای تابع چگالی احتمال زیر می باشد:

$$f(x) = \begin{cases} x-8 & 8\leq x\leq 9 \\ 10-x & 9<x\leq 10 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$E_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_8^9 (x^2-8x)\,dx + \int_9^{10} (10x-x^2)\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_8^9 - \frac{8x^2}{2}\Big|_8^9 + 5x^2\Big|_9^{10} - \frac{x^3}{3}\Big|_9^{10} = \dots = 9$$

الف) میانگین و واریانس

$$Var(X) = E(X^2)-(E_X)^2 = \int_8^9 x^2(x-8)\,dx + \int_9^{10} x^2(10-x)\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4}\Big|_8^9 - \frac{8x^3}{3}\Big|_8^9 + \frac{10x^3}{3}\Big|_9^{10} - \frac{x^4}{4}\Big|_9^{10} = \dots \approx 81.19$$

☆ ب) تولید کننده ی این کالا آن را به قیمت ثابت 200 تومان می فروشد و ضمانت می کند که هرگاه

STAEDTLER®

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

یک مشتری کالایی با وزن ۸٫۲۵ بجز پول آن را پس دهد. هزینه‌ی تولید کالا بستگی به وزن کالا دارد و در واقع برابر $\frac{x}{15}+\frac{35}{100}$ است. امید ریاضی سود کالا را بدست آورید.

تمرین. تغییر یک کامپیوتر شخصی برحسب ساعت یک متغیر تصادفی با تابع چگالی زیر است:

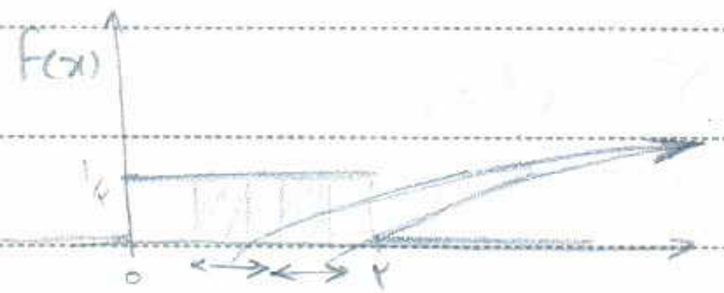
$$f(x)=\begin{cases}1/2 & 0<x<2\\ 0 & o.w.\end{cases}$$

هزینه‌ی تعمیر بستگی به زمان تعمیر دارد و هرگاه زمان x باشد هزینه برابر با $40+30\sqrt{x}$ است. امید ریاضی هزینه‌ی تعمیر کامپیوتر را بدست آورید. (متوسط)

حل:

$$E(40+30\sqrt{x})=\int_0^2 \frac{40+30\sqrt{x}}{2} f(x)\,dx =$$

$$f(x)=\begin{cases}k & a<x<b\\ \alpha & o.w.\end{cases}$$



وقتی چگالی ثابت می‌شود یعنی در تمام بازه‌ها احتمال برابر است.

+تذکر (احتمال یعنی سطح زیر منحنی)

☆ اگر در بازه‌های مساوی ... ← متغیر یکنواخت و احتمال برابر است.

تمرین. تابع چگالی X به صورت زیر است. $f(x)=\begin{cases}a+bx^2 & 0\le x\le 1\\ 0 & o.w.\end{cases}$

اگر $E_x=3/5$ ، a، b را پیدا کنید.

$$E_x=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx=\int_0^1 x(a+bx^2)\,dx$$

$$=\int_0^1 ax\,dx+\int_0^1 bx^3\,dx = \frac{ax^2}{2}\Big]_0^1+\frac{bx^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{a}{2}+\frac{b}{4}=\frac{3}{5} \quad (1)$$

طبق خواص تابع چگالی: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1 \Rightarrow \int_0^1 (a+bx^2)\,dx = ax\Big]_0^1+\frac{bx^3}{3}\Big]_0^1 = a+\frac{b}{3}=1 \quad (2)$

$$\Rightarrow \begin{cases}a+\frac{b}{2}=\frac{6}{5}\\ -a-\frac{b}{3}=-1\end{cases} \Rightarrow \frac{b}{6}=\frac{1}{5} \Rightarrow b=\frac{6}{5},\ a=\frac{3}{5}$$

$f(x)\ge 0$

سود کالا = { ...

تمرین صفحه‌ی قبل. ب)

STAEDTLER®
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

SUBJECT: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n$ بسط تیلور $\xrightarrow{b=0}$ بسط مک لورن

Year ( ) Month ( ) Date (

تابع مولد گشتاور :

فرض کنید X یک متغیر تصادفی و t یک مقدار حقیقی در همسایگی صفر باشد، در این صورت تابع مولد گشتاور X در نقطه‌ی t به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$M_x(t)=E(e^{tx})=\begin{cases}\sum_x e^{tx}P(X=x) & \text{اگر متغیر گسسته باشد :}\\ \int e^{tx}f(x)\,dx & \text{" " پیوسته باشد :}\end{cases}$$

☆ بنا به تعریف امید ریاضی $E(X^i)$ را گشتاور مرتبه iام متغیر تصادفی X می‌گوییم.

توجه شود که $e^a \overset{☆}{=} \sum_{i=0}^{\infty}\frac{a^i}{i!}$ (بسط سری مک لورن تابع $f(x)=e^a$)

در نتیجه

$$e^{tx}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(tx)^i}{i!}=1+tx+\frac{t^2}{2}x^2+\frac{t^3}{6}x^3+\cdots$$

$$\Rightarrow M_x(t)=E(e^{tx})=1+tEx+\frac{t^2}{2}Ex^2+\frac{t^3}{6}Ex^3+\cdots$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dM_x(t)}{dt}\right|_{t=0}=\left.Ex+tEx^2+\frac{t^2}{2}Ex^3+\cdots\right|_{t=0}=Ex$$

$$\left.\frac{d^2M_x(t)}{dt^2}\right|_{t=0}=\left.Ex^2+tEx^3+\cdots\right|_{t=0}=Ex^2$$

$$\vdots$$

$$\left.\frac{d^kM_x(t)}{dt^k}\right|_{t=0}=E(X)^k \qquad k=1,2,3,\ldots$$

نکته: توجه شود که گشتاورهای یک متغیر تصادفی شاخص‌های مربوط به نحوه‌ی پراکندگی جامعه‌ای را بیان می‌کند که توسط X مشخص می‌شود.

STAEDTLER®

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

نکته‌ی 2 : تابع مولد گشتاور یکتا است. یعنی اگر دو متغیر تصادفی دارای تابع مولد گشتاور یکسانی باشند آنگاه آن دو متغیر تصادفی هم توزیع هستند. اگر x و y دو متغیر تصادفی گسسته باشند هم توزیعی آن‌ها

$$\underbrace{X \overset{d}{=} Y}_{\text{هم توزیع}} \qquad \forall z ;\ P(X=z) = P(Y=z)$$

یعنی اینکه :

و اگر X و Y پیوسته باشند یعنی اینکه : $\forall z \quad f_X(z) = f_Y(z)$

$$X \longrightarrow P(X=x) \qquad E(e^{tx}) = \sum_x e^{tx} P(X=x) = \textcircled{1}$$

$$Y \longrightarrow P(Y=y) \qquad E(e^{ty}) = \sum_y e^{ty} P(Y=y) = \textcircled{1}$$

: +

اگر برابر باشند یعنی $P(X=x) = P(Y=y)$ $\Leftarrow$ $X \overset{d}{=} Y$ هم توزیع اند. (مثال بعدا)

مروری بر مشخصه‌های جامعه :

توجه شود که هر متغیر تصادفی مانند X یک جامعه را بیان می‌کند. به عبارتی متغیر تصادفی X که بیان عددی یک صفت مورد مطالعه در یک تحقیق آماری است از لحاظ نحوه‌ی پخش شدن روی محور اعداد حقیقی مورد توجه می‌باشد.

برای یک محقق مهم است که تمرکز مقادیر X کجاست؟ میزان پراکندگی X چه قدر است؟ وضعیت تقارن یعنی به احتمالات فراوانی‌های نسبی دارد

یا عدم تقارن مقادیر X به لحاظ احتمال (فراوانی‌های نسبی) چگونه است؟ میزان کشیدگی و نرمال بودن

و یا پخ بودن فراوانی‌های نسبی مقادیر X چگونه است؟

* پاسخ کلیه‌ی سوال‌های فوق را می‌توان بر اساس شاخص‌هایی که توسط گشتاورهای متغیر تصادفی X ساخته

STAEDTLER®
www.iran-ieee.com

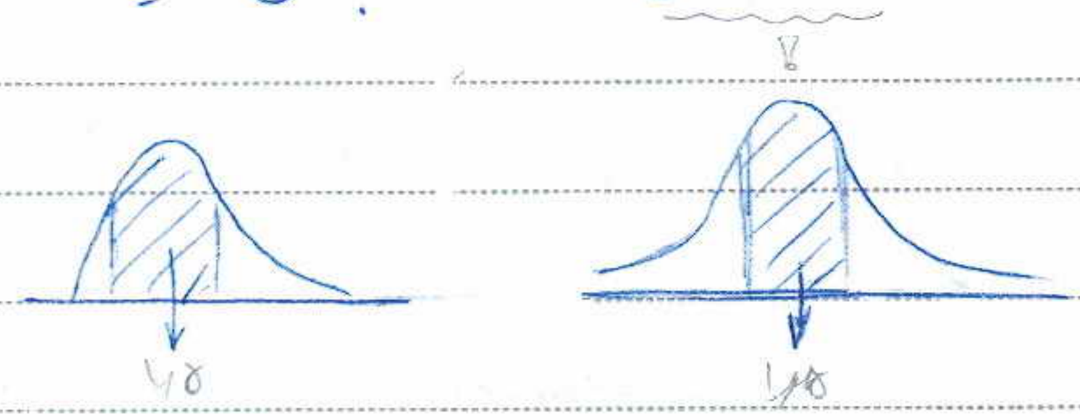
WWW.MOHANDESYAR.COM

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date (

می شوند، داد.

۱) مهم ترین شاخص تمرکز مقادیر یک متغیر تصادفی مانند X از لحاظ احتمالی، گشتاور مرتبه اول X یا همان امید ریاضی X است. $\mu = E(X) = 10$



- یکی دیگر از شاخص های مهم تمرکز میانه است.

بنابه تعریف میانه عددی است که ۵۰٪ جامعه از آن عدد کوچکتر باشند. (جامعه یعنی صفت مورد مطالعه)

☆ اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، m میانه ی توزیع X (ضابطه ی ریاضی که نشان دهنده ی نحوه ی پخش شدن مقادیر متغیر تصادفی X روی محور اعداد حقیقی به لحاظ احتمالی باشد) باشد، آنگاه m از فرمول زیر محاسبه می گردد:

$$\int_{-\infty}^{m} f(x)\,dx = 1/2$$

(ضابطه ریاضی که از روی چندبر فراوانی (یا درصدی) به دست می آید)

مثال ۱- فرض کنید X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد، میانه ی X را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & x>0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{m} f(x)\,dx =$$

$$= 0 + \int_{0}^{m} 3e^{-3x}\,dx = -e^{-3x}\Big]_{0}^{m} = 1 - e^{-3m}$$

$$\Rightarrow 1/2 = e^{-3m} \Rightarrow -\ln 2 = -3m$$

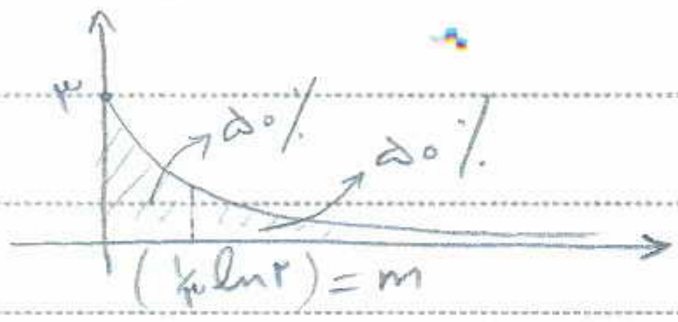
$$m = \frac{1}{3}\ln 2$$

STAEDTLER®

☆ مجموع فراوانی های نسبی = 1 :

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM



- چندک ها

تعریف - چندک مرتبه $100p$ ام $(0<p<1)$ یک متغیر تصادفی عددی است که $100p\%$ توزیع آن متغیر تصادفی کمتر از آن عدد باشد و آن را با Q_p نشان می‌دهیم. $\int_p$

اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد (با تابع چگالی احتمال $f(x)$) آنگاه Q_p از معادله‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\int_{-\infty}^{Q_p} f(x)\,dx = p \quad ✡$$

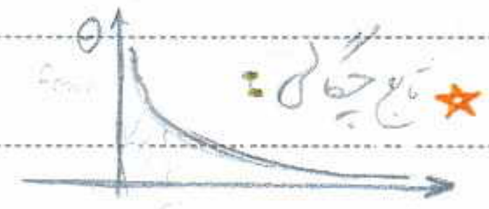
نکته: در بحث چندک ها اگر p مقادیر $0.1, 0.2, \dots, 0.9$ را اختیار کند به آن ها دهک می‌گوییم.

اگر p مقادیر $0.01, 0.02, \dots, 0.99$ را اختیار کند به آن ها صدک می‌گوییم.

اگر p مقادیر $0.25, 0.5, 0.75$ را اختیار کند به آن ها به ترتیب چارک اول، چارک دوم (میانه) و چارک سوم می‌گوییم.

مثال. فرض کنید X طول عمر یک قطعه‌ی الکترونیکی با تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & x>0 \quad \theta>0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$



مطلوبست محاسبه‌ی Q_p.

$$\int_{-\infty}^{Q_p} \underbrace{\theta e^{-\theta x}\,dx}_{f(x)\,dx} = p \Longrightarrow \int_0^{Q_p} \theta e^{-\theta} = -e^{-\theta x}\Big|_0^{Q_p} = 1 - e^{-\theta Q_p}$$

STAEDTLER
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date (

$\Rightarrow 1-p = e^{-\theta Q_p} \Rightarrow \ln(1-p) = -\theta Q_p \qquad Q_p = \frac{-1}{\theta}\ln(1-p)$

شاخص‌های پراکندگی:

این شاخص‌ها میزان دوری و نزدیکی داده‌ها نسبت به هم را محاسبه می‌کنند. مهم‌ترین این شاخص‌ها عبارتند از:

۱) واریانس $\qquad var(x) = E(x - E_x)^2$

۲) انحراف معیار (تبدیل واحد) $\qquad \sqrt{var(x)}$

۳) ضریب تغییرات: فرض کنید X یک متغیر تصادفی باشد، در این صورت ضریب تغییرات x را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$C.V(x) = \frac{\sqrt{var(x)}}{E(x)}$$

* کاربرد از ضریب تغییرات برای مقایسه‌ی میزان پراکندگی توزیع دو متغیر تصادفی با واحدهای اندازه‌گیری متفاوت استفاده می‌شود.

+ اگر X و Y دو متغیر مفروض و $|CV(Y)| > |CV(X)|$ آنگاه پراکندگی متغیر تصادفی X (توزیع) کمتر است.

شاخص‌های توزیع:

نحوه‌ی پخش شدن داده‌ها روی محور اعداد حقیقی را نشان می‌دهند و بر دو دسته‌اند:

الف) شاخص‌های تقارن: این شاخص‌ها میزان تقارن یا عدم تقارن داده‌ها (توزیع متغیر تصادفی) را مشخص می‌کنند.

STAEDTLER®

۲) بدون واحد اندازه‌گیری / تفاوت میانگین‌ها (E_x و Var ...) (x)

Iran-ieee.com

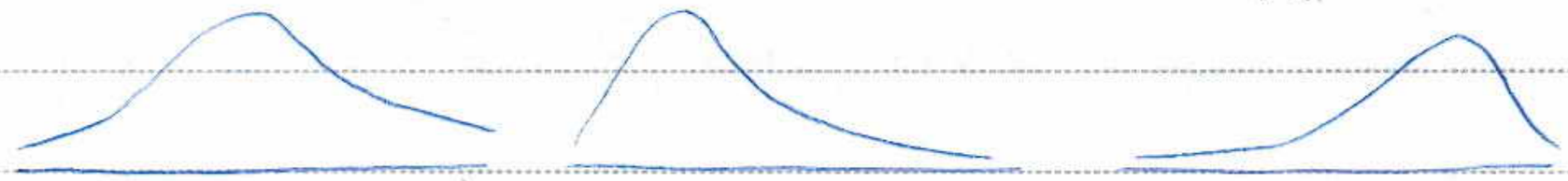
WWW.MOHANDESYAR.COM

skewness

مهم‌ترین شاخص تقارن ضریب گشتاوری چولگی است که به صورت زیر ساخته می‌شود.

ظاهر می‌شود (Ex^3)

$$sk = \frac{E(X-Ex)^3}{(\sqrt{Var(X)})^3} = \begin{cases} 0 \longrightarrow \text{توزیع } X \text{ متقارن است.} \\ >0 \longrightarrow \text{توزیع } X \text{ نامتقارن و چوله به راست است} \\ <0 \longrightarrow \text{توزیع } X \text{ نامتقارن و چوله به چپ است.} \end{cases}$$



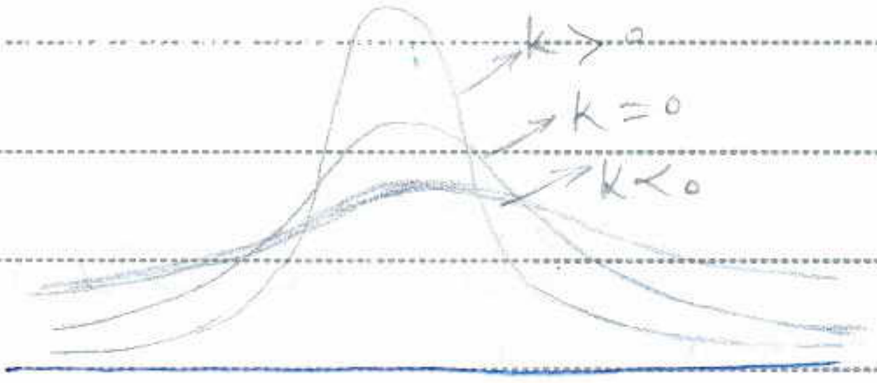
$sk=0$ $sk>0$ $sk<0$

ب) شاخص‌های کشیدگی: این شاخص‌ها میزان کشیدگی داده‌های مختلف را نسبت به کشیدگی مجموعه‌ای از داده‌ها خاص که به آن‌ها داده‌های نرمال می‌گوییم می‌سنجند.

مهم‌ترین شاخص کشیدگی ضریب گشتاور کشیدگی است:

$$k = \frac{E(X-Ex)^4}{(Var(X))^2} - 3$$

$$k = \begin{cases} 0 \longrightarrow \text{داده‌ها نرمال هستند} \\ <0 \longrightarrow \text{داده‌ها پخ‌تر از نرمال هستند.} \\ >0 \longrightarrow \text{داده‌ها کشیده‌تر از نرمال هستند.} \end{cases}$$



(تعریف) - داده‌های نرمال (توزیع نرمال) فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با میانگین μ و انحراف معیار σ باشد

در این صورت می‌گوییم X دارای توزیع نرمال است هرگاه: $(f(x))$

۱- توزیع X متقارن باشد. $sk \approx 0$

۲- تقریباً ۶۷٪ جامعه بین دو بازه‌ی $(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$ قرار گیرد یعنی $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma) = 0.67$

۳- ۹۵٪ جامعه در بازه‌ی $(\mu-2\sigma, \mu+2\sigma)$ قرار گیرد.

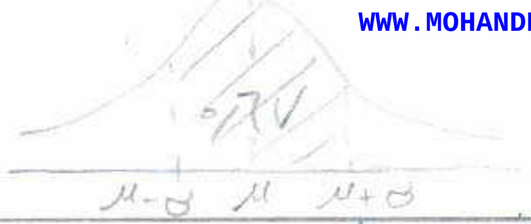
STAEDTLER®
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date (

تمرین - ...



۴- تقریباً ۹۹٪ جامعه در بازه‌ی $(\mu-3\sigma , \mu+3\sigma)$ قرار گیرد. $(\checkmark \leftarrow 4,3,2)$

متغیرهای تصادفی توأم.

فرض کنید که فضای نمونه‌ی یک آزمایش تصادفی و X و Y متغیرهای تصادفی باشند که روی S تعریف می‌شوند.

در این بخش رفتار همزمان (توأم) X و Y را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال- آزمایش دوبار پرتاب یک سکه را در نظر بگیرید و متغیرهای تصادفی زیر را تعریف کنید.

X : تعداد خط‌ها (در دو پرتاب) Y : تعداد شیرها در پرتاب اول

تابع جرم احتمال توأم X و Y را به دست آورید.

$S=\{$ش ش ، خ ش ، ش خ ، خ خ $\}$

X : ۲ ۱ ۱ ۰ $\Rightarrow R_X=\{0,1,2\} \Rightarrow$ X گسسته است

Y : ۰ ۰ ۱ ۱ $R_Y=\{0,1\} \Rightarrow$ Y گسسته است

نکته ☆ برای به دست آوردن تابع جرم احتمال توأم X و Y بایستی به ازای کلیه‌ی مقادیر x و y مقادیر احتمال $P(X=x, Y=y)$ محاسبه شود. به مجموعه‌ی کلیه‌ی این احتمالات "تابع جرم احتمال توأم" X و Y می‌گوییم.

جدول تابع جرم احتمال توأم:

y \ x	۰	۱	۲
۰	۰	۱/۴	۱/۴
۱	۱/۴	۱/۴	۰

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$

$$P(X=x, Y=y)=\begin{cases} 1/4 & (x,y)\in\{(1,0),(2,0),(0,1),(1,1)\} \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

STAEDTLER®

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

تعریف: به تابع احتمال $P(X=x, Y=y)$ تابع جرم احتمال توأم متغیرهای تصادفی گسسته‌ی X و Y

می‌گوییم هرگاه: الف) $\forall x,y \; ; \; P(X=x, Y=y) \geq 0$

ب) $\sum_y \sum_x P(X=x, Y=y) = 1$

تابع احتمال حاشیه‌ای:

(در حالت گسسته)

اگر تابع احتمال توأم $P(X=x, Y=y)$ را داشته باشیم، تابع جرم احتمال متغیر تصادفی گسسته‌ی X را که به آن

تابع جرم احتمال حاشیه‌ای X می‌گوییم با استفاده از قانون احتمال کل به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$P(X=x) = \sum_y P(X=x, Y=y)$$

✓ $Y=y$ افرازی ... در قانون احتمال کل

و به طور مشابه:

$$P(Y=y) = \sum_x P(X=x, Y=y)$$

- در مثال قبل، توابع جرم احتمال حاشیه‌ای X و Y را حساب کنید.

$Y \backslash X$	0	1	2	$P(Y=y)$
0	0	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	0	1/2
$P(X=x)$	1/4	1/2	1/4	

$$P(X=x) = \begin{cases} 1/4 & x=0 \\ 1/2 & x=1 \\ 1/4 & x=2 \\ 0 & o.w. \rightsquigarrow \star \end{cases} = \begin{cases} 1/4 & x=0,2 \\ 1/2 & x=1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$P(Y=y) = \begin{cases} 1/2 & y=0 \\ 1/2 & y=1 \\ 0 & o.w. \end{cases} = \begin{cases} 1/2 & y=0,1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

STAEDTLER®

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date (

تعریف: اگر X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته باشند، $f(x,y)$ "تابع چگالی احتمال توأم X و Y" گوییم هرگاه:

الف) $\forall x,y:\ f(x,y) \geq 0$

چون شاید x و y برخی که عضو تکیه‌گاه نباشند

ب) $\iint f(x,y)\,dx\,dy = 1$

تعریف: اگر $f(x,y)$ مفروض باشد، $f(x)$ را که تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X می‌گوییم به طریق زیر

محاسبه می‌کنیم:

$$f_X(x) = \int_{R_Y} f(x,y)\,dy$$

به طور مشابه:

$$f_Y(y) = \int_{R_X} f(x,y)\,dx$$

مثال ۲- فرض کنیم X و Y دارای تابع چگالی احتمال زیر باشند. توابع احتمال حاشیه‌ای X و Y را حساب کنید.

الف) $f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y} & x,y>0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$

ثابت (در این مثال k باید پیدا کنید)

ب) $f(x,y) = \begin{cases} k & x,y>0,\ x+y\leq 2 \\ 0 & o.w. \end{cases}$

حل الف

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} f(x,y)\,dy = e^{-x}\int_0^{\infty} 2e^{-2y}\,dy = e^{-x}\times 1$$

$$= e^{-x} \overset{\star}{=} \begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) \overset{?}{=} \begin{cases} 2e^{-2y} & y>0 \\ 0 & o.w. \end{cases} \qquad \overset{\text{مشابه}}{=} \int_0^{\infty} 2e^{-x-2y}\,dx = -2e^{-2y-x}\Big|_0^{\infty} = +2e^{-2y}$$

STAEDTLER®

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

✓ تعمیم موارد ذکر شده برای حالت بیش از دو متغیر ✓

حل ب) ★ برای پیدا کردن k توجه شود که اولاً $k>0$ ، ثانیاً $\iint f(x,y)\,dx\,dy = 1$

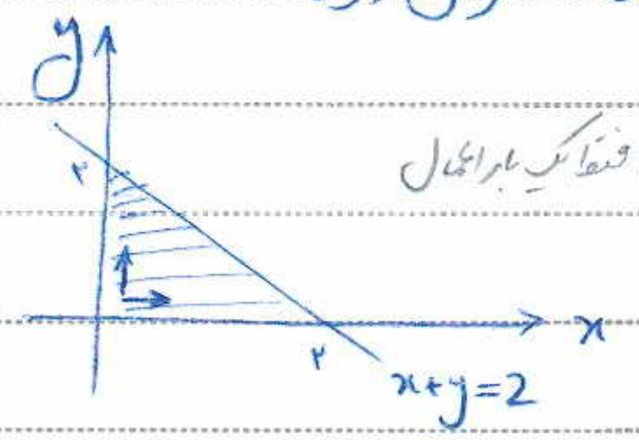
$$1 = \iint f(x,y)\,dx\,dy =$$

★ اعمال محدودیت فقط یک بار

$$= \int_0^2 \int_{0=y}^{2-y=x} k\,dx\,dy$$

★ برای تعیین حدود انتگرال دوگانه :

$$\overset{\text{ب}}{=} \int_0^2 \underbrace{\int_0^{2-x=y} k\,dy}_{\text{داخل}}\,dx$$



۱. ★ محدودیت متغیر $2-y$ را فقط یک بار اعمال می‌کنیم.

۲. ★ محدودیت در انتگرال داخلی اعمال می‌شود ...

$$= k\int_0^2 (2-x)\,dx = k\left(2x - x^2/2\right)\Big]_0^2 = 2k$$

$$\Rightarrow k = 1/2$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^{2-x} \underbrace{f(x,y)}_{1/2}\,dy = 1/2 \int_0^{2-x} dy$$

۳. ★ برای یک انتگرال مثل اینجا حتماً محدودیت ($2-x$ △) را اعمال می‌کنیم.

$$= \begin{cases} \frac{2-x}{2} & 0<x<2 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$f(y) = \int_0^{2-y} 1/2\,dx \overset{*}{=} \begin{cases} \frac{2-y}{2} & 0<y<2 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

استقلال.

تعریف. دو متغیر تصادفی X و Y را مستقل گوییم اگر و تنها اگر : الف) $R(x,y) = R_x \times R_y$

ب) $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \times F_Y(y)$

STAEDTLER®
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date (

اگر گسسته: $P(X=x, Y=y)$

تذکر

$$R_{(x,y)} = \{(x,y) ;\ f(x,y) > 0\}$$

$\neq 0 \rightarrow \star \ldots$

مثال. استقلال X و Y را در مثال ۱ بررسی کنید.

$\ldots \star \Rightarrow$ X و Y مستقل نیستند

y \ x	0	1	2
0	0	1/4	1/4
1	1/4	1/4	0

$R_x = \{0,1,2\}$ $\quad R_y = \{0,1\}$

$R_{(x,y)} = \{(1,0),(2,0),(0,1),(1,1)\}$

$\neq$

$R_{(x)} \times R_y = \{(0,0), \ldots, (2,1)\}$

$\Longrightarrow R_{(x,y)} \neq R_x \times R_y \Longrightarrow$ X و Y مستقل نیستند

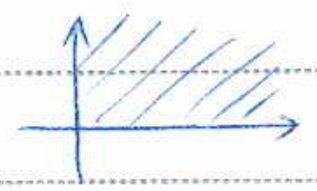
تذکر: تکیه‌گاه یک متغیر تصادفی مجموعه‌ی کلیه‌ی نقاطی است که احتمال در آن نقاط مثبت باشد، همین تعریف برای تکیه‌گاه توأم دو متغیر تصادفی نیز برقرار است.

$(\neq 0)$

تذکر ۲: اگر در یک جدول جرم احتمال توأم حداقل یکی از احتمالات صفر باشد آن دو متغیر تصادفی مستقل از هم نیستند (به هم وابسته اند).

مثال. در مثال ۲: الف)

$R_x = (0,\infty)$ $\quad R_y = (0,\infty)$

$R_x \times R_y = (0,\infty) \times (0,\infty) \xrightarrow{\star}$ 

$= R_{(x,y)}$: شرط اول برقرار است

$f_{x,y}(x,y) \overset{\checkmark}{=} f(x) \times f(y) \ \ldots \rightarrow$ شرط دوم هم برقرار است

$\Longrightarrow$ مستقل هستند

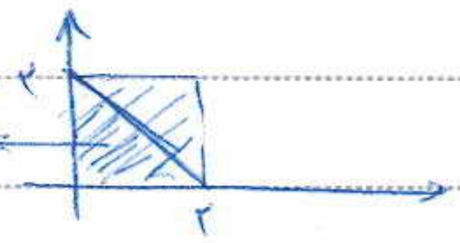
STAEDTLER®

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

در مثال ۲ ب)

$R_X \times R_Y \neq R(x,y)$ تکیه‌گاه توأم



$\Longrightarrow$ مستقل نیستند

تمرین - در توابع چگالی احتمال توأم زیر: اولاً) حاشیه‌ای‌ها را حساب کنید.

ثانیاً) استقلال متغیرهای تصادفی مربوطه را بررسی کنید.

1) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{5}x(2-x-y) & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$

$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-(x+y)} & x>0,\ y>0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$

* $f(x,y) = \begin{cases} 2 & 0<x<y,\ 0<y<1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$

1) $f_X(x) = \int_0^1 \frac{12}{5}(x2 - x^2 - xy)\,dy = \frac{12}{5}\left(2xy - x^2y - x\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{12}{5}\left(2x - x^2 - \frac{x}{2}\right);\ 0<x<1$

$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{12}{5}(2x - x^2 - xy)\,dx = \frac{12}{5}\left(x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}y\right)\Big|_0^1 = \frac{12}{5}\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{y}{2}\right) = \frac{12}{5}\left(\frac{2}{3} - \frac{y}{2}\right);\ 0<y<1$

$f_X(x)\,f_Y(y) = \frac{144}{25}\left(\frac{2}{3} - \frac{y}{2}\right)\left(2x - x^2 - \frac{x}{2}\right) = \frac{12}{5}x\left(\frac{12}{5} - \frac{8}{5}x - \frac{9}{5}y + \frac{6}{5}xy\right) \neq f(x,y)$

2) $f_X(x) = \int_0^\infty xe^{-(x+y)}\,dy = -xe^{-(x+y)}\Big|_0^\infty = +xe^{-x}$ $(x>0)$

$f_Y(y) = \int_0^\infty xe^{-(x+y)}\,dx = e^{-y}\left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^\infty = 1\times e^{-y}$ $y>0$

$+x$	e^{-x}
-1	$-e^{-x}$
0	e^{x}

$f_X(x)\,f_Y(y) = f(x,y)$ ، $f(x,y)>0$ همواره $\xRightarrow{ask} R_X R_Y = R(x,y) \Rightarrow$ مستقل

3) $f_X(x) = \int_0^1 2\,dy = 2y\Big|_0^1 = 2$ $0<x<y$ $\quad f_Y(y) = \int_0^y 2\,dx = 2y$; $0<y<1$

$f_X(x)\,f_Y(y) \neq f(x,y)$ مستقل نیستند

$\lim_{x\to\infty} -xe^{-x} \overset{\infty/\infty}{\underset{Hop}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$

STAEDTLER®
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

تابع احتمال شرطی

فرض کنید X و Y دو متغیر گسسته باشند در این صورت تابع جرم احتمال شرطی X به شرط $Y=y$ را به فرم زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(X=x \mid Y=y) \triangleq \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$$

اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته باشند، تابع چگالی احتمال شرطی X به شرط $Y=y$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$

مثال - در آزمایش دو بار پرتاب سکه فرض کنید X تعداد شیرها و Y تعداد خط‌ها در پرتاب اول باشند. تابع جرم احتمال شرطی X به شرط $y=0$ را حساب کنید. حل.

y \ x	0	1	2	P(Y=y)
0	0	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	0	1/2

$S = \{$ خ خ ، خ ش ، ش خ ، ش ش $\}$

X	2	1	1	0
Y	0	1	0	1

$$P(X=x \mid Y=0) = \begin{cases} 0/\frac{1}{4} & x=0 \\ \frac{1/4}{1/2} = 1/2 & x=1 \\ \frac{1/4}{1/2} = 1/2 & x=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1/2 & x=1,2 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

نکته ۱: تابع جرم (چگالی) احتمال شرطی خود یک تابع جرم (چگالی) احتمال است.

نکته ۲: اگر X و Y مستقل باشند:

$$P(X=x \mid Y=y) \overset{\checkmark}{=} P(X=x)$$

STAEDTLER®
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date (

تمرین. فرض کنید X و Y دارای تابع چگالی احتمال توام زیر باشند، چگالی شرطی X به شرط Y را حساب کنید.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{12}{5}x(2-x-y) & ; 0<x,y<1\\ 0 & \text{o.w.}\end{cases}$$

$$f(x|y)=\frac{\overbrace{f(X=x,Y=y)}^{f(x,y)}}{f(Y=y)}$$

حل. ☆ چک کردن: $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy \overset{?}{=} 1$ ☆

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{6x(2-x-y)}{4-3y}, \quad \underbrace{0<x<1}_{☆}$$

$$f(Y=y)=\int_{R_x} f(x,y)\,dx=\frac{12}{5}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{y}{2}\right)=\frac{12}{5}\left(\frac{4-3y}{4}\right)$$

امید ریاضی شرطی.

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی باشند، در این صورت امید ریاضی شرطی X به Y را از فرمول زیر حساب می‌کنیم.

$$E(X|Y=y)=\begin{cases}\sum_x x\,P(X=x|Y=y) & \text{اگر X و Y گسسته باشند:}\\ \int_{R_x} x\,f_{X|Y}(x|y)\,dx & \text{اگر X و Y پیوسته باشند:}\end{cases}$$

☆ اول محاسبه‌ی کلی بعد عددگذاری به جای y الزاماً

مثال - در تمرین قبل مطلوبست محاسبه‌ی $E(X|Y=0.5)$ ؟

$$E(X|Y=0.5)=?=\int_0^1 x f(x|y)\,dx=\frac{1}{4-3y}\int_0^1 6x^2\overbrace{(2-x-y)}^{(2-y)-x}\,dx$$

$$=\frac{1}{4-3y}\left\{2(2-y)-\frac{3}{2}\right\}\Big|_{y=0.5}=\frac{3-1.5}{2.5}=0.6$$

* واریانس شرطی.

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی باشند آنگاه واریانس شرطی X به شرط $Y=y$ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$Var(X|Y=y)=E\left[(X-E(X|Y=y))^2\right] \qquad E(X-E(X|Y=y))^2$$

$$\overset{?}{=}E[X^2|Y=y]-(E(X|Y=y))^2$$

STAEDTLER®

ص ۱۷۶

$$E(u[X]|y)=\int_{R_x\,\text{یا}\,(-\infty)}^{\infty} u(x)\,f(x|y)\,dx$$

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

البته گسسته بودن X کافی است.

که در آن:

$$E(X^2|Y=y)=\begin{cases}\sum_x x^2 P(X=x|Y=y) & \text{اگر } X \text{ و } Y \text{ گسسته باشند:}\\ \int x^2 f_{X|Y}(x|y)\,dx & \text{اگر } X \text{ و } Y \text{ پیوسته باشند:}\end{cases}$$

* نکته) اگر X و Y دو متغیر تصادفی مفروض باشند، آنگاه

الف) (امید ریاضی دوگانه) $Ex = E[E(X|Y)]$

ب) $Var(X) = E[var(X|Y)] + Var[E(X|Y)]$

تذکر ۱: امید ریاضی یک متغیر تصادفی مقداری ثابت است. (واریانس یک متغیر تصادفی هم مقداری ثابت است.)

۲) امید ریاضی و واریانس شرطی X به شرط Y یا مقداری ثابت و یا تابعی از a است. (نسبت به X ثابت است)

اثبات ب)

$$Var[\underbrace{E(X|Y)}_{h(y)}] = E[h(y)-\underbrace{E(h(y))}_{Ex}]^2 = E[h^2(y)] - (E(h(y)))^2 \pm E(x^2)$$

$$= \underbrace{Ex^2-(Ex)^2}_{Varx} - [\underbrace{E(x^2)}_{EE(X|Y)\ \ E(E(X|Y))} - E(h^2(y))]$$

$$\underbrace{E(E(x^2|y)) - E^2(x|y)}_{var(X|y)}$$

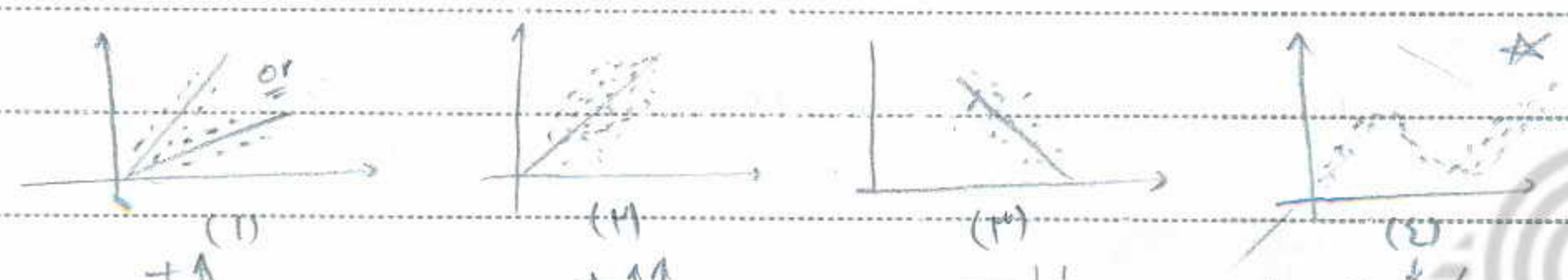
$$(E(x^2)-E(h^2(y))) = E(\underbrace{E(x^2|Y)}_{Q}) - E(E^2(X|Y)) = E(Var(X|Y))$$

* کوواریانس: فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی باشند، کوواریانس X,Y به صورت زیر است:

$$Cov(X,Y) = E\{(X-Ex)(Y-Ey)\}$$

میزان خطی بودن

* شیب هم نسبت (۱) فقط ± بودن شیب هم است.



(۱) $+\uparrow$ (۲) $+\uparrow\uparrow$ (۳) $-\downarrow\downarrow$ (۴) * رابطه کاری نداریم!

میان ترم ← ۱/۲۹ چهارشنبه هفته اول بعد عید کلاس تشکیل می شود.

STAEDTLER
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

SUBJECT:
Year ( ) Month ( ) Date (

ضریب همبستگی ← { ۱) بدلایل تفاوت واحد ۲) $Cov \in (-\infty, \infty)$ }

(۱۰) نکته: کوواریانس کمیزان رابطه خطی بین دو متغیر تصادفی را اندازه می‌گیرد. اگر کوواریانس عدد مثبتی باشد یعنی یک رابطه خطی مستقیم یا مثبت بین دو متغیر تصادفی وجود دارد.

★ $Cov \pm \equiv$ شیب $\pm$ ←

اگر کوواریانس عددی منفی باشد یعنی یک رابطه‌ی خطی معکوس یا منفی بین دو متغیر تصادفی وجود دارد.

mem

و اگر Cov مقداری نزدیک به صفر داشته باشد آنگاه هیچ نوع رابطه‌ی خطی بین آن دو متغیر تصادفی وجود نخواهد داشت.

نکته: بزرگی و کوچکی عدد کوواریانس بستگی به میزان پراکندگی توده‌ی نقاط نسبت به هم دارند. هرچه توده‌ی نقاط متراکم‌تر باشند، اندازه‌ی واریانس عددی بزرگتر خواهد بود.

★ $|Cov| \equiv$ تراکم

(قدر مطلق)

ضریب همبستگی

از این شاخص برای بررسی رابطه‌ی خطی بین دو متغیر تصادفی استفاده می‌شود و دقیقاً مانند Cov تفسیر می‌شود. اما مشکلات Cov را که در زیر آمده است ندارد:

۱) Cov دارای واحد اندازه‌گیری است. (حاصلضرب واحد اندازه‌گیری X و Y)

۲) Cov محدود نیست. یعنی متعلق به $\mathbb{R}$ است.

دلایل فوق باعث می‌شود نتوان از Cov به منظور مقایسه‌ی شدت و ضعف رابطه‌ی خطی بین دو زوج

STAEDTLER®

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

متغیر تصادفی استفاده کرد. برای این منظور از ضریب همبستگی با فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\,Var(Y)}}$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E_X E_Y$$

$Cov(X,Y) = E((X-E_X)(Y-E_Y)) = E(XY - XE_Y - YE_X + E_X E_Y)$

تمرین - نشان دهید:

$= EXY - E_X E_Y + E_X E_Y - E_X E_Y =$

$= EXY - E_X E_Y$ ✓

نکته: اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند آنگاه:

1) $E_{XY} = E_X E_Y$

$\not\Rightarrow$

2) $Cov(X,Y) = 0$

3) $\rho(X,Y) = 0$

توجه شود که رابطه ی فوق یک رابطه ی یک طرفه است. (مثال بزنید)

تمرین: ضریب همبستگی و واریانس X و Y را برای همه ی مثال های قبل حساب کنید!

- یک معدنچی در معدنی که دارای سه راه خروجی است به دام افتاده است. خروجی اول به تونلی منتهی می شود که پس از ۳ ساعت راهپیمایی نجات می یابد، خروجی دوم وی را پس از ۵ ساعت راهپیمایی به معدن برمی گرداند و خروجی سوم پس از ۷ ساعت او را به معدن برمی گرداند. اگر فرض کنیم معدنچی در تمام حالات با احتمال مساوی یکی از این خروجی ها را انتخاب کند، متوسط زمان نجات وی چه قدر است؟

$E_X \overset{*}{=} E[E(X|Y)]$

حل. X زمان نجات فرد

Y شماره خروجی انتخاب شده

y	۱	۲	۳
$P(Y=j)$	۱/۳	۱/۳	۱/۳

STAEDTLER®
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

SUBJECT: $\left(E(xEy) = EyEx\right)$

Year ( ) Month ( ) Date (

$$\Rightarrow E(x) = E\left[\underbrace{E(x|y)}_{g(y)\,\star}\right] = \sum_{y=1}^{3} g(y)\,P(y=y) =$$

$$= g(1)\underbrace{P(y=1)}_{1/3} + g(2)\underbrace{P(y=2)}_{1/3} + g(3)\underbrace{P(y=3)}_{1/3}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{E(x|y=1) + E(x|y=2) + E(x|y=3)\right\} = \frac{1}{3}\left\{3 + \overbrace{(5+Ex)}^{\star i} + (7+E_x)\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{15 + 2Ex\right\} \Rightarrow 3Ex = 15 + 2Ex \qquad Ex = 15$$

نکات میانگین و واریانس مجموع متغیرهای تصادفی

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی و a، b و c مقادیر ثابتی باشند در این صورت:

1) $E(ax+by+c) = aEx + bEy + c$

$$\overbrace{Var(ax+by+c)}^{\star Z} = a^2Var(x) + b^2Var(y) + \overbrace{2abCov(x,y)}^{\overset{?}{=}0} \qquad (Var(ax+b) = a^2Var(x))$$

(اثبات با نوشتن براساس امید ریاضی ... که پاورقی)

تذکر: اگر $x_1, \dots, x_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و $a_1, \dots, a_n$ مقادیر ثابتی باشند آنگاه:

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\, Var x_i$$

نکته: قابل تعمیم و اثبات

$$Cov(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3,\ b_1y_1 + b_2y_2 + b_3) = \overbrace{a_1b_1Cov(x_1,y_1)}^{\star i} +$$

$$+ a_1b_2Cov(x_1,y_2) + a_2b_1Cov(x_2,y_1) + a_2b_2Cov(x_2,y_2)$$

STAEDTLER®

$$var(Z) = E(Z-Ez)^2 = E(ax+by+\cancel{c}-aEx-bEx-\cancel{c})^2 =$$

$$= E\left(a(x-Ex)+b(y-Ex)\right)^2 = \dots$$

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

خواص کوواریانس :

۱) $Cov(X,X) = Var(X) \neq 0$

۲) $Cov(X,a) = 0$ (a: ثابت)

۳) $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

تمرین - می‌دانیم اگر X و Y مستقل باشند آنگاه $E(XY) = EX\,EY$. با یک مثال نشان دهید که عکس حالت فوق برقرار نیست. (گره‌ی بعد)

مثال - فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع چگالی احتمال $f(x)$ و تابع توزیع احتمال $F(x)$ باشند. تابع چگالی احتمال هر یک از

۱) $Y = \min(X_1, \dots, X_n)$

۲) $Z = \max(X_1, \dots, X_n)$

را حساب کنید.

حل (۲). ابتدا تابع توزیع Z را محاسبه می‌کنیم و سپس با مشتق گرفتن ...

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \le z) =$$

$$= P(X_1 \le z, X_2 \le z, \dots, X_n \le z) \overset{\text{استقلال پیشامدها}}{=} P(X_1 \le z)P(X_2 \le z) \cdots P(X_n \le z)$$

$$\overset{\text{هم‌توزیعی } X\text{ها}}{=} [P(X_1 \le z)]^n = [F(z)]^n \Longrightarrow f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = n f(z) [F(z)]^{n-1}$$

حل (۱). $F_Y(y) = P(Y \le y) = 1 - P(Y \ge y) \overset{1-}{=} P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) > y)$

$$= 1 - P(X_1 > y, \dots, X_n > y) \underset{\text{استقلال پیشامدها}}{=} 1 - P(X_1 > y)P(X_2 > y) \cdots P(X_n > y)$$

STAEDTLER®
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date (

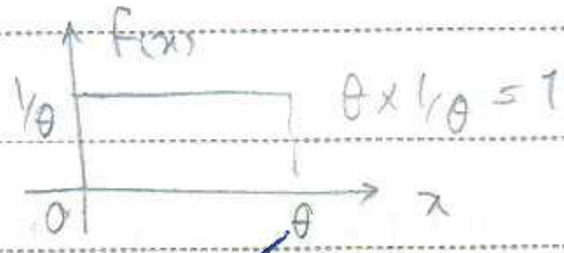
$\{X$ هم توزیعی

$$= 1-\left[P(X_1>y)\right]^n = 1-\left[1-F(y)\right]^n$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = n f(y)\left[\underbrace{1-F(y)}_{\text{تابع بقا (طول عمر)}}\right]^{n-1}$$

مثال - فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع چگالی احتمال زیر باشند که در آن θ مقداری ثابت است:

$$f(x) = \begin{cases} 1/\theta & 0<x<\theta \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$



امید ریاضی (متوسط) ماکزیمم $X_1, \dots, X_n$ را حساب کنید.

حل: فرض کنید $Z = \max(X_1, \dots, X_n)$ باید $E(Z) = \int_0^\theta z f_Z(z)\,dz$ را حساب کنیم. برای این منظور بایستی تابع چگالی Z را حساب کنیم. با استفاده از مثال قبل داریم:

$$f_Z(z) = n\underbrace{f(z)}_{1/\theta}\left[\underbrace{F(z)}\right]^{n-1}$$

$$F(z) = P(X_1 \le z) = \int_0^z \underbrace{f(x)}_{1/\theta}dx = \begin{cases} 0 & z<0 \\ z/\theta & 0<z<\theta \\ 1 & z>\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Z(z) = \frac{n}{\theta}\left(\frac{z}{\theta}\right)^{n-1} = \frac{n z^{n-1}}{\theta^n} \quad (0<z<\theta)$$

$$\Rightarrow E(Z) = \int_0^\theta z\,\frac{n z^{n-1}}{\theta^n}\,dz = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta z^n\,dz = \frac{n}{\theta^n}\,\frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\theta$$

تمرین - فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع چگالی احتمال زیر باشند:

$$f(x) = 2e^{-2x} \qquad x>0$$

متوسط مینیمم $X_1 \dots X_n$ را حساب کنید.

STAEDTLER®

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(\min(X_1,\dots,X_n) \le z) =$ me حس. X_i طول عمر قطعه i ام در بین n قطعه

$= 1 - P(\min(X_1,\dots,X_n) \ge z) = 1 - (P(X_1 \ge z))^n = 1 - [1 - P(X_1 \le z)]^n = 1 - \left(1 - \int_0^z f(x)\,dx\right)^n =$

$1 - \left(1 - \int_0^z 2e^{-2x}\right)^n = 1 - \left(1 + e^{-2x}\Big]_0^z\right) = 1 - (1 + e^{-2z} - 1) = 1 - e^{-2nz}$

$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = 2ne^{-2nz}$ $(z > 0)$ $\leftarrow$ $(x > 0 \Rightarrow z = \min(x_1,\dots,x_n) > 0)$

$E(Z) = \int_0^\infty z f_Z(z)\,dz = \int_0^\infty z\,2ne^{-2nz}\,dz = -ze^{-2nz}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-2nz}\,dz = 0 + \frac{-1}{2n} e^{-2nz}\Big]_0^\infty =$

$= -1/2n$

چک) $\int_0^\infty f_Z(z)\,dz = -e^{-2nz}\Big]_0^\infty = 1$

مثال نقض برای عکس نکته‌ی دو برگه قبل: (نکته بعد ؟)

$y \backslash x$	-1	0	1	$P(X=x)$
-1	$1/4$	$1/3$	$1/4$	$2/3$
0	0	0	0	0
1	$1/4$	0	$1/4$	$1/3$
$P(Y=y)$	$\frac{1}{3}$	$1/3$	$1/3$	

$E_X = \frac{-1}{3} + 0 + \frac{1}{3} = 0$

$E_Y = (-1)\frac{2}{3} + 0 \times 0 + 1 \times 1/3 = -1/3$

$\Rightarrow Cov(X,Y) = E[(X - E_X)(Y - E_Y)] =$

$= (-1)(-1) \cdot 1/4 + 0(-1)\,1/3 + 1(-1)\,1/4 +$

$(-1)1 \cdot 1/4 + 1 \times 1 \times 1/4 = 0 \rightarrow$ اما دو متغیر مستقل نیستند.

$(= \rho(X,Y))$

همچنین برای $x = -1$ ، $y = -1$: $E_X E_Y \ne E_{XY}$

$(f(x,y) \ne g(x)h(y))$

$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(s,t)\,ds\,dt$ (ص ۱۱۵)

$E(g(X,Y)) = \sum_x \sum_y g(x,y) f(x,y)$ پیوسته $= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y)\,dx\,dy$

STAEDTLER
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

میان ترم: تا آخر اول متغیرهای دوبعدی

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date (

(توزیع توابعی از متغیرهای تصادفی)

مهم ۵ فرض کنید X و Y متغیرهای مستقل هم توزیع با تابع توزیع چگالی احتمال زیر باشند:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

تابع چگالی احتمال $Z=X/Y$ را به دست آورید. $(\mathcal{W}=RI)$

★ هم توزیع اند یعنی $f(x)$ هر دو یکی است:

$$X \longrightarrow f_X(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

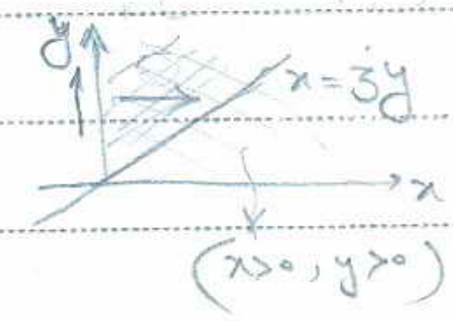
$$Y \longrightarrow f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y} & y>0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

تابع چگالی توام X, Y

$$f_{X,Y}(x,y) \overset{\uparrow}{=} f_X(x)\, f_Y(y)=\begin{cases} e^{-x-y} & x,y>0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P\left(\frac{X}{Y}\le z\right) \overset{\star}{=} \iint_{X/Y\le z} f(x,y)\,dx\,dy = \overset{\text{ادامه}}{\cdots}$$

$$X/Y\le z \overset{\star}{\Longleftrightarrow} x\le zy$$



نکته

$$\star\ P(g(X,Y)\in B)=\iint_{g(x,y)\in B} f(x,y)\,dx\,dy$$

(تغییرات را در داشتن محدود کامل)

$$\overset{\text{ادامه}}{\cdots}=\int_0^\infty\int_0^{zy} e^{-x}e^{-y}\,dx\,dy=\int_0^\infty e^{-y}\underbrace{\left(-e^{-x}\right)\Big]_0^{zy}}_{1-e^{-zy}}dy=$$

$$=\int_0^\infty\left(e^{-y}-e^{-y(z+1)}\right)dy=\left(-e^{-y}+\frac{e^{-y(z+1)}}{z+1}\right)\Bigg]_0^\infty=-\left(-1+\frac{1}{z+1}\right)=$$

$$=\frac{z}{z+1}\qquad z>0 \longrightarrow \left(z=\frac{x}{y}>0 \text{ چون } x,y>0 \text{ پس}\right)$$

(چهار شرط)

بررسی درستی: $\lim_{z\to-\infty}F(z)=0 \qquad \lim_{z\to+\infty}F(z)=1$

$$\xrightarrow{\text{ادامه حل}} f_Z(z)=\frac{d}{dz}F_Z(z)=\frac{z+1-z}{(z+1)^2}=\begin{cases}\dfrac{1}{(z+1)^2} & (z>0)\\ 0 & o.w.\end{cases}$$

$$\left(\int_0^\infty f_Z(z)=1 \quad : \text{بررسی درستی} +\right)$$

STAEDTLER®

ت. اگر $Z=\frac{X}{X+Y}$ گفته بود: $0<z<1$

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

تک متغیره: میان ترم (تا اول توام و دو متغیره + نامساوی های امروز)

نامساوی مارکوف (Markov): کلید محاسبه‌ی کران‌ها + برای پیوسته و گسسته برقرار است.

اگر X یک متغیر تصادفی باشد که فقط مقادیر نامنفی را می‌گیرد، آنگاه برای هر $a>0$: $P(X\geq a)\leq \frac{EX}{a}$

اثبات برای حالت پیوسته:

$$EX=\int_0^\infty xf(x)\,dx=\underbrace{\int_0^a xf(x)\,dx}_{\geq 0}+\int_a^\infty xf(x)\,dx$$

$$\geq \int_a^\infty xf(x)\,dx$$

$$>a\int_a^\infty f(x)\,dx$$

: چون $x>a \Rightarrow \int \underbrace{xf(x)\,dx}_{+} > \int a\underbrace{f(x)\,dx}_{+}$: $\int_{-}^{+}$

$$=aP(X\geq a)$$

$$\Rightarrow EX\geq aP(X\geq a)$$

نامساوی چبیچف (chebychov):

اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، آنگاه برای هر مقدار $k>0$ داریم:

$$P(|X-\mu|\geq k)\leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

به عبارتی:

$$P(|X-\mu|\geq \alpha k)\leq \frac{1}{k^2}$$

اثبات. (با استفاده از نامساوی مارکوف)

$$\mu=EX$$

$$\sigma^2=\operatorname{Var}X=E(X-EX)^2$$

بدیهی است که: $(X-\mu)^2$ یک متغیر تصادفی نامنفی است بنابراین براساس نامساوی مارکوف:

$$P((X-\mu)^2\geq k^2)\leq \frac{E(X-\mu)^2}{k^2}=\frac{\sigma^2}{k^2}$$

STAEDTLER
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

SUBJECT:

Year ( ) Month ( ) Date (

$$\Rightarrow P(|X-\mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

تمرین - فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر باشد، ضریب چولگی گشتاوری X را حساب کنید ★

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

★ راه دیگر هم درسته ولی این روش را بعضوان یک روش یاد بگیریم؛ برای مسئله‌ای که با انتگرال راحت حساب نشه!

$$sk = \frac{E(x-\mu)^3}{\sigma^3} = \frac{E(x^3 - 3x^2\mu + 3x\mu^2 - \mu^3)}{\sigma^3}$$

$$= \frac{Ex^3 - 3\mu E(x^2) + 3\mu^2 Ex - \mu^3}{\sigma^3 = var^{3/2}}$$

★ $\frac{d}{dt} M_x(t) = Ex$, $\frac{d^2}{dt^2} M_x(t) = Ex^2$, $\frac{d^3}{dt^3} M_x(t) = Ex^3$

$$\sigma^3 = (Ex^2 - (Ex)^2)^{3/2}$$

- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad x \in \mathbb{R}$$

مطلوبست محاسبه‌ی Ex^2, Ex^3, Ex^4

سعی کنید با تابع مولد گشتاور حساب کنید.

چون با f باید چیزها رو جور بزنیم.

$$M_x(t) = e^{t^2/2} \quad \ldots$$

STAEDTLER®

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

تمرین ۴ مهم

توزیع های خاص احتمالی

الف) توزیع های گسسته:

۱- توزیع برنولی. گوییم متغیر تصادفی گسسته‌ی X دارای توزیع برنولی با پارامتر p است هرگاه دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد.

(مشخصه جامعه (توضیحی در مورد آن))

$$P(X=x)=\begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & x=0,1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

مصداق: فرض کنیم در یک آزمایش دوحالتی، موفقیت شکست، با احتمال موفقیت p، X تعداد موفقیت‌ها در یک بار انجام آزمایش باشد. $X \sim b(p)$

مثال. فرض کنید ۸۰٪ دانشجویان (رشته مهندسی) درس آمار قبول می‌شوند، چقدر احتمال دارد علی در یک کلاس آمار قبول شود؟

حل. ملاحظه می‌شود که آزمایش مورد نظر یک آزمایش دوحالتی است، بنابراین اگر X نشانگر قبول شدن علی باشد آنگاه $X \sim b(0.8)$ دارای توزیع برنولی می‌باشد (با پارامتر ۸۰) و در نتیجه:

$$P(\text{قبول شده}) = P(X=1) = (0.8)^1(0.2)^0 = 0.8$$

تمرین ۱: فرض کنید: $X \sim b(p)$، الف) نشان دهید: $Ex = p$, $varx = p(1-p)$

ب) تابع مولد گشتاور X را حساب کنید. $M_X(t) = 1-p+pe^t$ ← کنکور

الف) $Ex = \sum_{x=0,1} x\,P(X=x) = 0\times P(x=0) + 1\times P(X=1) = 1\times p\,\cancel{(1-p)^0}^{\,1} = p$

$varx = Ex^2 - (Ex)^2 = \sum x^2 P(X=x) - p^2 = p - p^2$

ب) $M_X(t) = \sum_{x=0,1} e^{tx} P(X=x) = P(x=0) + e^t P(X=1) = 1-p+e^t p$

Zarrin Barg
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{2\times(2n-1)\cdots\times(n+1)}{n!} \times \frac{1}{2^{2n}}$

۲- توزیع دوجمله‌ای:

گوییم متغیر تصادفی گسسته X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و p است اگر دارای تابع جرم احتمال زیر باشد:

$$P(X=x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x=0,1,2,\dots,n \\ 0 & o.w. \end{cases} \qquad \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

مصداق: اگر یک آزمایش دوحالتی موفقیت شکست با احتمال موفقیت p را به طور مستقل از هم n بار تکرار کنیم و متغیر تصادفی X را تعداد موفقیت‌ها در آن آزمایش در نظر بگیریم (تعریف کنیم) آنگاه X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و p است که آن را با نماد زیر نشان می‌دهیم:

$$X \sim B(n,p)$$

تمرین- فرض کنید $X \sim B(n,p)$. الف) نشان دهید: $Var_X = np(1-p), E_X = np$

ب) نشان دهید $M_X(t) = (1-p+e^t p)^n$ ←

ب) $M_X(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \underbrace{(e^t p)}_{a}{}^x \underbrace{(1-p)}_{b}{}^{n-x} = (1+e^t p - p)^n$

برای حل ب: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$ بسط دوجمله‌ای نیوتن

الف)

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \cdot \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} = np \sum_{x=1}^{n} \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} (1-p)^{n-x}$$

$$\xrightarrow[m=n-1]{y=x-1} = np \underbrace{\sum_{y=0}^{m} \binom{m}{y} p^y (1-p)^{m-y}}_{=1} = np \times 1 = np$$

مجموع مقادیر توابع دوجمله‌ای با پارامترهای m و p

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = E(X(X-1)) + E(X) - (EX)^2$$

$$E(X(X-1)) = \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=2}^{n} \frac{n!}{(x-2)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} = n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \binom{n-2}{x-2} p^{x-2} (1-p)^{n-x}$$

$$\xrightarrow[m=n-2]{y=x-2} = n(n-1)p^2 \sum_{y=0}^{m} \binom{m}{y} p^y (1-p)^{m-y} = n(n-1)p^2$$

$$\Rightarrow Var(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$$

Zarrin Barg
www iran-ieee .com

WWW.MOHANDESYAR.COM

اثبات قضیه ۴

قضیه) اگر $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای مستقل و هم توزیع از توزیع $b(p)$ باشند آنگاه $X=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$

اثبات: می‌دانیم اگر $X \sim B(n,p)$ آنگاه $M_X(t)=(1-p+pe^t)^n$ حال اگر $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$: آنگاه بنا به منحصر به فرد بودن تابع مولد گشتاور می‌توانیم نتیجه بگیریم که $M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t)=(1-p+pe^t)^n$

اما:

$$M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = E\left[e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] = E\left[\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right] \overset{\{X_i \text{ استقلال}\}}{=} \prod_{i=1}^{n} \underbrace{E(e^{tX_i})}_{M_{X_i}(t)}$$

$$\overset{\{X_i \text{ هم توزیعی}\}}{=} (M_{X_1}(t))^n \overset{\text{نتایج تمرین ۱}}{=} (1-p+pe^t)^n$$

نکته) اگر $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند و g یک تابع حقیقی باشد آنگاه:

$g(X_1), \dots, g(X_n)$ نیز متغیرهای تصادفی مستقل هستند.

مثال. اگر شخصی یک آزمون ۴ گزینه‌ای را که شامل ۱۰۰ سوال است به تصادف پاسخ دهد:

الف) چقدر احتمال دارد ۵۰٪ سوالات را صحیح پاسخ دهد؟

ب) چقدر احتمال دارد حداقل بر دو سوال صحیح پاسخ دهد؟

ج) انتظار دارید چند پاسخ صحیح بدهد؟

حل.

$X \sim B(100, 1/4)$: تعداد پاسخ‌های صحیح.

الف) $50\% \times 100 = 50$ $\quad P(X=50) = \binom{100}{50}\left(\frac{1}{4}\right)^{50} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{50}$

Zarrin Barg
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ب) $P(X\geq 2) = P(X=2 \text{ یا } X=3 \text{ یا } \dots \text{ یا } X=100) \overset{\text{دو به دو ناسازگارند}}{=} \sum_{x=2}^{100} P(X=x)$

or $P(X\geq 2) = 1-P(X<2) = 1-P(X=0 \text{ یا } X=1) \overset{\text{دو به دو ناسازگار}}{=} 1-P(X=0)-P(X=1)$

$= 1-\binom{100}{0}(1/4)^0(3/4)^{100} - \binom{100}{1}(1/4)^1(3/4)^{99} = 1-(3/4)^{100} - 25\times(3/4)^{99}$

ج) $E(X) = np = 100\times\frac{1}{4} = 25$

۳- توزیع هندسی (Geometric)

گوییم متغیر تصادفی گسسته‌ی X دارای توزیع هندسی با پارامتر p است هرگاه دارای تابع جرم احتمال زیر باشد:

$$P(X=x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & x=1,2,\dots \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

مصداق: در یک آزمایش دوحالتی موفقیت شکست، با احتمال موفقیت p اگر متغیر تصادفی X را تعداد آزمایش‌های لازم تا حصول اولین موفقیت تعریف کنیم آنگاه X دارای توزیع هندسی با پارامتر p است که آن را با نماد زیر نشان می‌دهیم: $X\sim G(p)$

$\lim_{n\to\infty} q+q^2+\dots = \frac{1-p}{1-1+p} = 1/p-1$

مثال. اگر $X\sim G(p)$ ثابت کنید: $Ex = 1/p$, $Var\,x = \frac{1-p}{p^2}$

تمرین ۲: تابع مولد گشتاور توزیع $G(p)$ را حساب کنید. راهنمایی: $(1-p)=q$

$\sum_{x=1}^{\infty}(qe^t)^x$ $\sum_{x=1}^{\infty} pq^{x-1} = 1$

$1+2q+3q^2+\dots = \frac{1}{(1-q)^2}$

برای Var: $1+4q+9q^2+\dots = \frac{1+q}{(1-q)^2}$

$1+q+q^2+\dots = \frac{1}{1-q}$

Zarrin Barg
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$\frac{p}{q}\sum_{x=1}^{\infty} q^x = 1 \Rightarrow \sum_{x=1}^{\infty} q^x = \frac{q}{p} = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{1-q}$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} a^x = \frac{a}{1-a}$$

پایه‌ی هندسی ...

مولد گشتاور: $M_t(x) = \sum_{1}^{\infty} e^{tx} p(1-p)^{x-1} = \sum_{1}^{\infty} \underbrace{(e^t q)^x}_{a+a^2+\dots \;\; a(1+a+\dots)} \frac{p}{q} = \frac{e^t q}{1-e^t q} \times \frac{p}{q} = \frac{pe^t}{1-e^t q}$ ✓

مثال تیراندازی با احتمال ۰٫۷ به هدف می‌زند چه قدر احتمال دارد اولین تیری که به هدف می‌خورد پنجمین شلیک وی باشد؟ انتظار دارید در 20 بار شلیک چند بار هدف مورد اصابت قرار گیرد؟ (فرض بر اینست که شلیک‌ها مستقل از هم‌اند)

حل. $X \sim G(0.7)$: تعداد شلیک‌های لازم

$P(X=5) = pq^4 = 0.7 \times (0.3)^4$

A_i: پیشامد اینکه شلیک i ام به هدف بخورد، $i=1,2,\dots,5$

$P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5) =$

$= \underbrace{P(A_1^c)P(A_2^c)P(A_3^c)P(A_4^c)}_{(0.3)^4} \underbrace{P(A_5)}_{0.7}$

دوم: ✓

$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.7} = \frac{10}{7} \simeq 1.43$ $\qquad \frac{20}{1.43} = \frac{20}{1/0.7} = 14$

۴- توزیع پاسکال (دوجمله‌ای منفی)

گیریم متغیر تصادفی X دارای توزیع پاسکال یا دوجمله‌ای منفی با پارامترهای r و p است هرگاه دارای تابع جرم احتمال روبرو باشد:

$$P(X=x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} & x=r, r+1, \dots \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

مصداق: اگر در یک دنباله از آزمایش‌های دوحالتی موفقیت شکست، با احتمال موفقیت p که به طور مستقل

Zarrin Barg
www.iran-ieee.com

$M_{\sum_{i=1}^{r} X_i}(t) = E(e^{t\sum_{i=1}^{r} X_i}) = E(\prod_{i=1}^{r} e^{tX_i}) \overset{\text{iid}}{=} \prod_{i=1}^{r} E(e^{tX_i}) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r$

WWW.MOHANDESYAR.COM

Subject:

Year. Month. Date. ( )

از هم انجام می‌شوند، متغیر تصادفی X را برابر تعداد آزمایش‌های لازم تا حصول r مین موفقیت در نظر بگیریم، آنگاه X دارای تابع توزیع دوجمله‌ای منفی با پارامترهای r و p است که آن را با نماد زیر نشان می‌دهیم:

$$X \sim \underbrace{NB}_{\star}(r,p)$$

نکته) اگر $X \sim NB(r,p)$ آنگاه $Ex = \frac{r}{p}$ ، $Var(X) = \frac{rq}{p^2}$. $(q=1-p)$

تمرین (۱). تابع مولد گشتاور $NB(r,p)$ را حساب کنید و با استفاده از آن نکته‌ی قبل را ثابت کنید.

تمرین (۲). اگر $X_1, \dots, X_r \overset{iid}{\sim} G(p)$ آنگاه: $Y = \sum_{i=1}^{r} X_i \sim NB(r,p)$

$\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r$

مستقل و هم‌توزیع با توزیع $G(p)$

مثال. ظرفی محتوی ۵ مهره‌ی سفید، ۳ مهره‌ی آبی و ۲ مهره‌ی قرمز است. در یک بازی بین بهروز و پیمان، اگر پیمان بتواند حداکثر در ۵ بار مهره برداری با جایگذاری به ۳ مهره‌ی قرمز برسد برنده است. احتمال برنده بودن وی را حساب کنید.

مستقل

حل. ملاحظه می‌شود که آزمایش دوحالتی با احتمال موفقیت $p = 2/10$ است و از آنجایی که قرار است به سه مهره‌ی قرمز دست یابیم، بنابراین: X تعداد آزمایش‌های لازم: $X \sim NB(3, 0/2)$

$$\Rightarrow P(\text{برد پیمان}) = P(X \le 5) \underset{\star}{=} P(X=3 \text{ یا } X=4 \text{ یا } X=5)$$

$$P(X=x) = \begin{cases} \binom{x-1}{2}(0/2)^3(0/8)^{x-3} & x = \underset{\star}{3, 4, \dots} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Zarrin Barg
iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$P(X=n)=\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{?} \frac{1}{2}$$

$$= P(X=3)+P(X=4)+P(X=5) = (0{,}2)^3\left[1+\underbrace{3(0{,}8)}_{2{,}4}+\underbrace{6(0{,}8)^2}_{3{,}84}\right] =$$

$$= 0{,}008 \times 7{,}24 = 0{,}05792$$

$$E_X = \frac{r}{p} = \frac{3}{0{,}2} = 15$$

ب) انتظار دارید ۳ بهره‌ی قرمز در چند بار تکرار آزمایش به دست آید.

+ شبیه کتاب

۵- توزیع پواسون.

گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع پواسون با پارامتر λ است هرگاه دارای تابع جرم احتمال زیر باشد.

$$P(X=x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & x=0,1,2,\dots \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

مصداق: فرض کنید متوسط تعداد اتفاقاتی که در یک بازه‌ی زمانی مشخص رخ می‌دهد، برابر λ باشد. اگر متغیر تصادفی X را تعداد اتفاقاتی در نظر بگیریم که در بازه‌ای با همان طول رخ می‌دهد، آنگاه X دارای توزیع پواسون با پارامتر λ است که آن را با نماد روبرو نشان می‌دهیم: $X \sim P(\lambda)$

تمرین ۱. تابع مولد گشتاور $X \sim P(\lambda)$ را محاسبه کنید.

تمرین ۲. نشان دهید اگر $X \sim P(\lambda)$ آنگاه $E(X) = Var(X) = \lambda$. (تخمین فرد)

تذکر: توجه شود که توزیع پواسون تنها توزیعی است که امید ریاضی و واریانس آن باهم برابرند.

PAPCO
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال. فرض کنید میانگین و واریانس یک متغیر تصادفی برابر ۵ است. احتمال اینکه مقدار آن متغیر تصادفی

E_x

برابر ۳ مشاهده شود، چه قدر است؟

حل. $E_x = Var\, x = 5 \Rightarrow X \sim P(5)$ $\qquad P(X=3) = \dfrac{e^{-5}\, 5^3}{3!}$

مثال ۲. فرض کنید متوسط تعداد تلفنهایی که در هر ۱۰ دقیقه به یک شرکت می‌شود برابر ۵ تلفن باشد، اگر منشی این

(λ)

شرکت بین ساعت ۱۰ تا ۱۰:۱۰ محل کار خود را ترک کند، چه قدر احتمال دارد در این مدت ۳ تلفن بی‌پاسخ

داشته باشیم؟

X: تعداد تلفن‌ها در هر ۱۰ دقیقه $\quad X \sim P(5) \Rightarrow P(X=3) = \dfrac{e^{-5}\, 5^3}{3!}$

فرآیند پواسون (تعمیم توزیع پواسون)

اگر λ (متوسط تعداد اتفاقات) در یک واحد زمانی محاسبه شده باشد، برای مطالعه‌ی تعداد اتفاقات در t

$t>0$

واحد زمانی، $N(t)$، توجه شود که به ازای خواص یک فرآیند پواسون، تابع جرم احتمال $N(t)$ به صورت زیر

متغیر!

است.

$$P[N(t)=x] = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!} & x=0,1,2,\dots \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$(\lambda \to \lambda t)$

در نتیجه: $E(N(t)) = Var(N(t)) = \lambda t.$

تمرین. فرض کنید تعداد اتوبوس‌هایی که در هر ۲۵ دقیقه به یک ایستگاه اتوبوس وارد می‌شود، به طور متوسط ۶ اتوبوس

باشد، چه قدر احتمال دارد: الف) بین ساعت ۸ تا ۸:۱۰، ۱۰ اتوبوس وارد ایستگاه شود؟

PAPCO
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

ب) بین ساعت ۱۲ تا ۱۲:۱۵، ۱۲ اتوبوس وارد ایستگاه شود؟

ج) بین ساعت ۱:۵۵ تا ۲، ۲ اتوبوس وارد ایستگاه شود؟

د) در هر حالت انتظار دارید چند اتوبوس وارد ایستگاه شود؟

حل. ۵ دقیقه = ۱ واحد زمانی

الف) $t=2$ ب) $t=17/5=3.4$

ج) $t=1$ (me)

الف) $P(N(t)=10)=\frac{e^{-2\times 4}(2\times 4)^{10}}{10!}$ $Ex=\lambda t=4\times 2$ ج) $P(X=2)=\frac{e^{-4}4^2}{2!}$ ...

ب) $P(N(t)=12)=\left(e^{-3.4\times 4}(3.4\times 4)^{12}\right)/12!$ $Ex=4\times 3.4$

تمرین - فرض کنید $X_1,\dots,X_n \overset{iid}{\sim} P(\theta)$ ثابت کنید $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim P(n\theta)$.

$$M_Y(t)=M_{\sum_{i=1}^{n}X_i}(t)=E\left(e^{t\sum_{i=1}^{n}X_i}\right)=E\left(\prod_{i=1}^{n}e^{tX_i}\right)=\prod_{i=1}^{n}\underbrace{E(e^{tX_i})}=\left(e^{\lambda(e^t-1)}\right)^n \rightarrow \text{ادامه...}$$

$$\overbrace{P(\lambda)}\ M_X(t)=\sum_{x=0}^{n}e^{tx}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{x=0}^{n}\frac{(\lambda e^t)^x}{x!}}_{\text{سری ماکلورن } e^z \text{ با } z=\lambda e^t}=e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}=e^{\lambda(e^t-1)}$$

★ تابع مولد گشتاور توزیع پواسون: $M_X(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$ ص ۲۰۵ فروند

$\longrightarrow$ ادامه... اینجا $t=n$ (تعمیم) $\Rightarrow \left(=e^{\lambda t(e^t-1)}\ \checkmark\right)$

$$\left(\underbrace{P\in n\theta}_{\text{همان } t \text{ در فرمول تعمیم توزیع پواسون}}\right):\ M_X(t)=\sum_{x=0}^{n}e^{tx}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}=e^{-\lambda t}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(e^t\lambda t)^x}{x!}=e^{-\lambda t}e^{e^t\lambda t}$$

$$=e^{\lambda t(e^t-1)}\ )$$

PAPCO

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$\frac{dM}{dt^2} \overset{*}{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{\theta}{(\theta-t)^2}\right) = \frac{2\theta}{(\theta-t)^3} \xrightarrow[\text{صفر است}]{\text{مقدار حقیقی در}} = \frac{2}{\theta^2} \Rightarrow Var(X) = \frac{2}{\theta^2} - \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 = \frac{1}{\theta^2}$$

تمرین (ادامه):

Subject:

Year. Month. Date. ( )

ب) توزیع های احتمالی پیوسته

۱- توزیع نمایی. گوئیم متغیر تصادفی پیوسته ی X دارای توزیع نمایی با پارامتر θ است هرگاه دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & x > 0 \\ 0 & o.w. \end{cases} \quad (\alpha = 1)$$

(Exponential)

مصداق: فرض کنید متوسط زمان لازم تا رخداد اتفاقی احتمالی خاص برابر $1/\theta$ باشد، اگر متغیر تصادفی X زمان لازم تا رسیدن به اولین حادثه یا اتفاق از همان نوع در نظر بگیریم آنگاه X دارای توزیع نمایی با پارامتر θ است که آن را با نماد $X \sim Exp(\theta)$ نشان می دهیم.

تمرین - فرض کنید $X \sim Exp(\theta)$ ؛ الف) تابع مولد گشتاور X را حساب کنید.

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx}\theta e^{-\theta x}\,dx = \theta\int_0^\infty e^{(t-\theta)x}\,dx = \frac{\theta}{t-\theta} e^{(t-\theta)x}\Big|_0^\infty \xrightarrow[\text{در حد یکی صفر}]{\text{مقداری حقیقی } t} = 0 - \frac{\theta}{t-\theta}e^{0} = \frac{\theta}{\theta - t}$$

$$\Rightarrow E_X = \frac{dM}{dt} = \frac{\theta}{(\theta-t)^2} \xrightarrow[\text{در حد یکی صفر}]{\text{مقداری حقیقی } t} = \theta/\theta^2 = 1/\theta$$

(۲ راه) یا جزء به جزء و تعریف

ب) نشان دهید: $Var(X) = \frac{1}{\theta^2}$, $E_X \overset{*}{=} 1/\theta$

مثال. فرض کنید متوسط طول عمر لامپهای تولیدی یک کارخانه ۱۰۰۰ ساعت باشد. اگر شخصی لامپی از تولیدات این کارخانه بخرد؛ الف) چقدر احتمال دارد که این لامپ بیشتر از ۱۲۰۰ ساعت عمر کند؟

ب) چه قدر احتمال دارد این لامپ بین ۸۰۰ تا ۱۵۰۰ ساعت عمر کند؟

ج) انتظار دارید این لامپ چه قدر عمر کند؟

حل:

$1/\theta = 1000 \Rightarrow \theta = 0/001 \qquad X \sim Exp(0/001)$

$$f(x) = \begin{cases} 0/001 e^{-0/001 x} & x \geq 0 \\ 0 & o.w. \rightarrow x < 0 \end{cases}$$

PAPCO

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

☆ توزیع گاما: $M_X(t)=\left(\frac{\theta}{\theta-t}\right)^{\alpha}$, $EX=\frac{\alpha}{\theta}$, $VarX=\frac{\alpha}{\theta^2}$

الف) $P(X>1200)=\int_{1200}^{\infty}0{,}001e^{-0{,}001x}dx=-e^{-0{,}001x}\Big]_{1200}^{\infty}=e^{-1{,}2}<1$

ب) $P(800<X<1500)=\int_{800}^{1500}0{,}001e^{-0{,}001x}dx=-e^{-1{,}5}+e^{-0{,}8}$

ج) $EX=\frac{1}{\theta}=1000$

۲- توزیع گاما: گوییم متغیر تصادفی پیوسته‌ی X دارای توزیع گاما با پارامترهای α و θ است هرگاه دارای تابع چگالی احتمال روبرو باشد:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\theta^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\theta x}}{\Gamma(\alpha)} & x>0,\ \alpha,\theta>0\\ 0 & o.w.\end{cases}$$

که در آن $\Gamma(\alpha)$ «تابع گاما» است که به صورت زیر تعریف می‌شود: $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$

اگر $\alpha\in\mathbb{N}$ آنگاه ثابت می‌شود که: $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$

مصداق: توزیع گاما حالت تعمیم یافته‌ی توزیع نمایی است که برای متغیرهایی که نشان دهنده‌ی طول عمر باشند می‌توانند استفاده شوند، و حالت خاصی که $\alpha\in\mathbb{N}$، مدت زمان لازم تا حصول α امین اتفاق در یک آزمایش طول عمر که متوسط زمان لازم برای هر اتفاق برابر $1/\theta$ است دارای توزیع گاما با پارامترهای α,θ می‌باشد. نماد: $X\sim\Gamma(\alpha,\theta)$

مثال. فرض کنید متوسط زمان لازم تا رسیدن یک اتوبوس به یک ایستگاه دو دقیقه باشد، چه قدر احتمال دارد حداکثر ۸ دقیقه طول بکشد تا ۵ اتوبوس وارد ایستگاه شوند؟

Zarrin Barg
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل. X: مدت زمان لازم تا رسیدن پنجمین اتوبوس. $X \sim \Gamma(5, 1/2)$ $\quad \frac{1}{\theta} = 2 \Rightarrow \theta = 1/2$

$$P(X \le 8) = \int_0^8 f(x)\,dx = \int_0^8 \frac{x^4 e^{-x/2}}{2^5 \times 4!}\,dx \overset{\text{ج-جزء}}{=} \dots$$

$$\overset{ch}{=} -2x^4 e^{-x/2} - 16 e^{-x/2} x^3 - 96 x^2 e^{-x/2} - 24 \times 16\, x e^{-x/2} + 24 \times (-32) e^{-x/2}$$

	x^4	$e^{-x/2}$
+	$4x^3$	$-2e^{-x/2}$
−	$12x^2$	$4e^{-x/2}$
+	$24x$	$-8e^{-x/2}$
−	24	$16e^{-x/2}$
+	0	$-32e^{-x/2}$

تمرین. فرض کنید $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} Exp(\theta)$ ، ثابت کنید $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \theta)$

نکته) حالت خاصی از توزیع گاما که در آن $\alpha = n/2$ و $\theta = 1/2$ باشد به توزیع کی-دو با n درجه آزادی (پارامتر) معروف است و آن را با نماد $X \sim \chi^2_n$ نشان می‌دهیم.

☆ در آزمایش فقط n تا بتواند تغییر کند و برای آن شرط نداشته باشیم...

$$\Downarrow$$

$$X \sim \chi^2(n)$$

کی-دو (chi-square)

۳- توزیع نمایی دوپارامتری.

در توزیع نمایی که تکیه‌گاه آن R^+ است. اگر بدانیم متغیر تصادفی مورد مطالعه حداقل می‌تواند مقدار μ را اختیار کند و سایر شرایط توزیع نمایی برقرار باشد، آنگاه متغیر مورد نظر دارای توزیع نمایی دوپارامتری با پارامترهای μ, θ است که دارای تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta(x-\mu)} & x > \mu \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

۴- توزیع یکنواخت پیوسته.

گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت روی بازه‌ی $(0, \theta)$ است هرگاه دارای تابع چگالی احتمال زیر

Zarrin Barg
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

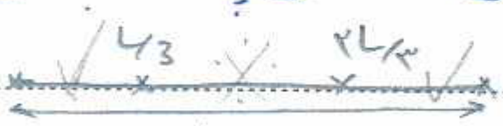
باشد:

$$f(x)=\begin{cases}1/\theta & 0<x<\theta\\ 0 & o.w.\end{cases}$$

مصداق: اگر روی پاره خطی به طول θ، نقطه‌ای به تصادف انتخاب شود و متغیر تصادفی X طول نقطه‌ی انتخاب شده (فرض کنید) باشد، اگر احتمال انتخاب یا واقع شدن این نقطه در هر جایگی هم طول از بازه‌ی $(0,\theta)$ همسان باشد، آنگاه X دارای توزیع یکنواخت روی بازه‌ی $(0,\theta)$ است که آن را با نماد $X\sim U(0,\theta)$ نشان می‌دهیم.

تمرین - تابع مولد گشتاور، امید ریاضی و واریانس توزیع $X\sim U(0,\theta)$ را حساب کنید. برگه

تمرین - روی پاره خطی به طول L نقطه‌ای به تصادف انتخاب می‌شود، چقدر احتمال دارد طول پاره خط بزرگتر حداقل دو برابر طول پاره خط کوچکتر باشد.



$$P(0<X\le L/3)+P(2L/3\le x<L)=\int_0^{L/3}\frac{1}{L}dx+\int_{2L/3}^{L}\frac{1}{L}dx$$
$$=\dots=2/3$$

مثال - از ایستگاه معینی از ساعت ۷ صبح به فاصله‌ی هر ۱۵ دقیقه اتوبوس‌ها عبور می‌کنند. اگر یک عابر در زمانی بین ۷ تا ۷:۳۰ که به طور یکنواخت توزیع می‌شود به ایستگاه مراجعه کند، مطلوبست محاسبه‌ی احتمال اینکه

زمان ایستگاه رفتن

الف) کمتر از ۵ دقیقه برای اتوبوس منتظر بماند.

ب) حداقل ۱۲ دقیقه برای اتوبوس منتظر بماند.

X: زمان ورود فرد به ایستگاه: $X\sim U(0,30)$

(۷ ۷:۱۵ ۷:۳۰ ...)

الف) $P(10<X\le 15)+P(25<X\le 30)$

$$=\int_{10}^{15}\frac{1}{30}dx+\int_{25}^{30}\frac{1}{30}dx=\frac{5}{30}+\frac{5}{30}$$
$$=1/3$$

Zarrin Barg
www.Iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل ب) $P(0<x\le 3)+P(15<x\le 18)=\int_0^3 \frac{1}{30}dx+\int_{15}^{18}\frac{1}{30}dx=\dots=\frac{1}{5}$ me

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\beta-\alpha} & \alpha<x<\beta\\ 0 & o.w\end{cases} \Longrightarrow M_x(t)=\frac{e^{t(\beta-\alpha)}-1}{t(\beta-\alpha)}$$

$(\alpha=0,\ \theta=\beta$: جزوه$)$ ★ توزیع یکنواخت

(فرمول)

$$Ex=\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad Var\,x=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

۵- توزیع نرمال.

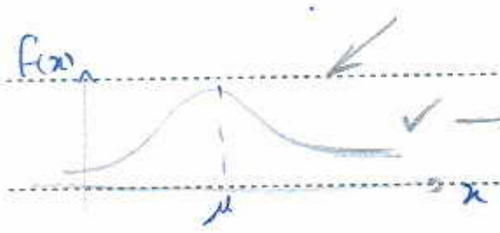
گوییم متغیر تصادفی پیوسته‌ی X دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 است، هرگاه دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \qquad \underbrace{x\in\mathbb{R}}_{★}$$

تمرین- تابع مولد گشتاور توزیع نرمال را محاسبه، امید ریاضی و واریانس آن را به دست آورید.

$$M_x(t)=e^{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}} \qquad E(x)=\mu \qquad var(x)=\sigma^2$$

مصداق: اگر مجموعه‌ای از داده‌ها دارای رفتار احتمالی متقارن باشند (بعبارتی ضریب چاولگی آن‌ها صفر باشد) و منحنی مربوط به آن زنگوله‌ای شکل باشد، همچنین روابط زیر به طور همزمان برقرار باشند:



★ زنگوله‌ای

به مجموعه‌ی داده‌ها، داده‌های نرمال و به متغیر تصادفی مبین آن‌ها متغیر نرمال و به توزیع آن متغیر توزیع نرمال گفته می‌شود. و روابط ذکر شده عبارتند از:

تقریب

۱) $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx 0.68$

۲) $P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx 0.95$

۳) $P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)\approx 0.99$

★↓

$P(-3<Z<3)\approx 0.99$ (نرمال استاندارد)

ضریب چاولگی $sk=\frac{E(X-EX)^3}{\sqrt{Var(X)}^3}$

Zarrin Barg
iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

نکته) در توزیع نرمال اگر $\mu=0$ و $\sigma^2=1$ به آن، توزیع نرمال استاندارد می‌گوییم.

نکته ۲) اگر X دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 باشد، آن را با نماد زیر نشان می‌دهیم: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

بنابراین $N(0,1)$ نشان دهنده‌ی توزیع نرمال استاندارد است.

نکته ۳) اگر $X \sim N(\mu, \sigma^2)$، آنگاه $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \overset{\text{قابل اثبات}}{\sim} N(0,1)$.

هر ترکیب خطی X نیز دارای توزیع نرمال است؟

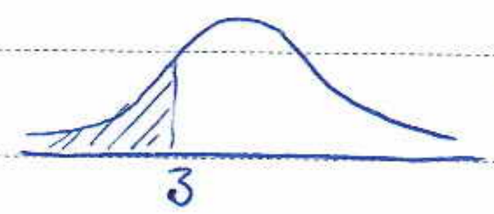
★ نکته اگر $Z \sim N(0,1)$ آنگاه:

$$P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$$

که انتگرال فوق با روش‌های عددی قابل محاسبه است. احتمال فوق به ازای مقادیر مختلف z محاسبه و در جدولی به نام "جدول توزیع نرمال" گردآوری شده است.

z	0.00	0.01	0.02	...	0.09
0.0					
0.1					
0.2			□		
⋮					
0.9					
1.0					
1.1					
⋮					

ترجمه به راهنمای جدول:



یا $P(Z \le z)$

$P(Z \le 0.22) = ? = \square$

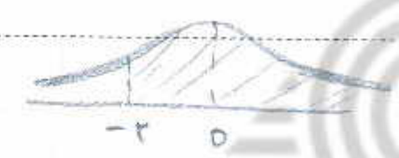
مثال. فرض کنید سود روزانه‌ی شرکت خاصی دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۰۰ و واریانس ۲۵ باشد، احتمال اینکه سود امروز شرکت حداقل ۹۰ باشد چه قدر است؟

سود شرکت $X \sim N(100, 25)$

$$P(X \ge 90) \overset{\star}{=} P\left(\underbrace{\frac{X-100}{5}}_{Z} \ge \frac{90-100}{5}\right) = P(Z \ge -2) = \begin{cases} 1 - P(Z \le -2) \\ \text{یا} \\ P(Z \le 2) = \end{cases}$$

★ تبدیل به $N(0,1)$

به علت تقارن توزیع نرمال



Zarrin Barg
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

Subject:
Year. Month. Date. ( )

★ برای کمیتی که نمی‌تواند منفی باشد هم می‌توان توزیع نرمال در نظر گرفت.

$= 0/9772$

$e^{\frac{t^2}{2}}$

تمرین ـ اگر Z دارای توزیع نرمال $Z \sim N(0,1)$ باشد آنگاه: $Z^2 \sim \chi^2(1)$.

$E(e^{t\sum_1^n X_i}) = \cdots = \prod_{i=1}^n E(e^{tX_i})$

$= \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{n/2} \quad \left(\sim = \left(\frac{1/2}{1/2 - t}\right)^{n/2}\right)$

تمرین ۲ ـ اگر $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} \chi^2(1)$ آنگاه $\sum_{i=1}^n X_i \sim \chi^2(n)$.

نکته) اگر $Z_1, \dots, Z_n \overset{iid}{\sim} N(0,1)$ آنگاه $\sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi^2(n)$.

قضیه حد مرکزی. فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم (هر) توزیع از توزیعی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند، در این صورت اگر حجم نمونه بسیار بزرگ باشد (به اندازه کافی بزرگ باشد) یعنی $n \to +\infty$ آنگاه:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{تقریبا}}{\approx}} N(0,1) \quad (*)$$

که در آن: $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$,

(★ $\bar{X}$ میانگین نمونه‌ی جامعه ولی μ میانگین جامعه.)
متغیر تصادفی — پارامتر

رابطه‌ی $(*)$ را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} N(0,1)$$

از طرفی می‌دانیم اگر $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند، آنگاه:

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \overbrace{EX_i}^{\mu} = n\mu$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) = n\sigma^2$$

بنابراین با فرض $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ رابطه‌ی $(*)$ را می‌توان مجدداً به صورت زیر نوشت:

$$\frac{Y_n - E(Y_n)}{\sqrt{Var(Y_n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} N(0,1) \quad (**)$$

$Var(aX+bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + \underbrace{2ab\,Cov(X,Y)}_{=0}$ اگر X و Y مستقل باشند

Zarrin Berg
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

فصل پنجم

نمونه‌گیری و برآورد: در یک جامعه‌ی مورد بررسی معمولاً برخی از شناسه‌های جامعه که به آن‌ها پارامتر می‌گوییم مجهول هستند. برای اطلاع از وضعیت این پارامترها بایستی نمونه‌ای تصادفی از آن جامعه انتخاب شود و براساس نمونه‌ی به دست آمده آن پارامترهای مجهول برآورد شود.

برخی از شناسه‌های جامعه ← پارامتر

تعریف پارامتر: مشخصه‌ای از جامعه است که مقداری ثابت امّا مجهول است. (مشخصه کمیتی است که خصوصیتی از جامعه را مشخص می‌کند مثل واریانس، میانگین و ...)

تعریف آماره: مشخصه‌ای از نمونه است که مقدار آن از نمونه‌ای به نمونه‌ای دیگر تغییر می‌کند و از آنجایی که نمونه‌ها به تصادف انتخاب می‌شوند تغییرات آماره نیز تصادفی است یعنی یک آماره یک متغیر تصادفی است که به پارامتر مجهول جامعه بستگی ندارد.

تعریف نمونه‌گیری: به عمل انتخاب بخشی از جامعه طبق اصول و ضوابطی خاص نمونه‌گیری گفته می‌شود و به آن بخش از جامعه که انتخاب می‌شود یک نمونه می‌گوییم. نمونه‌گیری انواع متفاوتی دارد: ۱) نمونه‌گیری تصادفی ساده

۲) نمونه‌گیری طبقه‌ای ۳) نمونه‌گیری خوشه‌ای ۴) نمونه‌گیری سیستماتیک یا دوره‌ای

تعریف جامعه آماری: مجموعه‌ای از افراد یا اشیاء که در یک تحقیق مورد بررسی قرار می‌گیرند را یک جامعه آماری گوییم.

واحد آماری: به هر یک از اعضای یک جامعه آماری گفته می‌شود.

Zarrin Barg
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در یک تحقیق آماری علاقه مندیم یا چند صفت جامعه را مورد بررسی قرار دهیم. صفات مورد بررسی به دو دسته تقسیم می شوند: ۱) صفات مشخصه یا ثابت: صفاتی هستند که در بین کلیه ی واحدهای آماری یکسان می باشند. ۲) صفات آماری یا متغیر تصادفی: که از واحدی به واحد آماری دیگر تغییر می کنند.

چارچوب آماری: به لیست تمام افراد (واحدهای) آماری یک جامعه ی آماری اطلاق می شود.

$N=1000$

۱) نمونه گیری تصادفی ساده: مثلاً در یک کلاس هر دانشجو یک شماره دارد، از ۱۰۰۰ عدد ۱۰۰ عدد تصادفی ایجاد می کنیم و صفت همان ها را بررسی می کنیم * به دو روش با جایگذاری و بدون جایگذاری.

۲) نمونه گیری طبقه ای: در حالت قبل ممکن است هر ۱۰۰ نفر رشته ی برق باشند پس دانشکده را طبقه بندی می کنیم و از این روش تعدادی از رشته برق و ... در نظر می گیریم.

برق
مکانیک
عمران

۳) نمونه گیری خوشه ای: جامعه را دسته بندی می کنیم، چند تا دسته را تصادفی انتخاب می کنیم پس این دسته ها را به طور کامل سرشماری می کنیم داخل هر دسته واحدهای آماری وجود دارد.

×				
		×		
	×			
				×

۴) نمونه گیری سیستماتیک یا دوره ای. از هر چند نفر که رد می شوند یک نفر را بهش فرم می دهند مثلاً هر ۳ نفر را نفر

X_1 ← مقدار صفت (مورد مطالعه برای نفر اول) متناظر با:

* با جایگذاری: نمونه را اگر قسم واحد آماری را به جامعه برمی گردانیم نتیجه آزمایش اول "تاثیری در آزمایش دوم ندارد."

* بدون جایگذاری: نمونه ها از هم مستقل نمی شوند. اگر حجم N (N بیشتر از ۲۰ برابر n) خیلی بیشتر از n باشد می توان این فرض را کرد که اگر بدون جایگذاری انجام شود مستقل می شود. * اگر مستقل باشند کواریانس ها صفر می شود.

Zarrin Barg

تذکر * اگر N (حجم جامعه) بیشتر از ۲۰ برابر n (حجم نمونه) باشد می توان فرض کرد که $X_1 \dots X_n$ تقریباً مستقل از هم اند.

iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

قرارداد: وقتی گوییم $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از جامعه‌ی مورد مطالعه است یعنی $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی iid از آن جامعه هستند. !!

تعریف. اگر کلیه‌ی n تایی‌های ممکن از یک جامعه به حجم N شانس مساوی برای رخداد داشته باشند به آن نمونه‌گیری، "نمونه‌گیری تصادفی ساده" می‌گوییم.

$\{a, b, c\}$

* با جایگذاری و با رعایت ترتیب

$\{a, b\}\{b, a\}$
$\{a, c\}\{c, a\}$
$\{b, c\}\{c, b\}$

پارامتر: آماره‌ای است که برای تخمین مقدار واقعی پارامتر جامعه استفاده می‌شود و به مقدار آن (مشخصه‌ای از نمونه) برآورد پارامتر گفته می‌شود.

نکته: پارامترهای مهم یک جامعه عبارتند از: ۱- میانگین جامعه (μ) ۲- واریانس جامعه (σ^2)

۳- نسبت در جامعه (P)

اگر $X_1, \dots, X_n$ مقادیر صفت مورد بررسی در جامعه باشند آنگاه:

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \qquad \sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2$$

$$P = \frac{A}{N} \longrightarrow$$ (A تعداد واحدهای آماری که دارای خصوصیت ویژه‌ای هستند.)

نکته: مهم‌ترین آماره‌های نمونه عبارتند از: ۱) میانگین نمونه ($\bar{X}$) ۲) واریانس نمونه (S^2) ۳) نسبت در نمونه ($\bar{P}$)

Zarrin Barg
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر $X_1, \dots, X_n$ مقادیر صفت مورد بررسی در نمونه انتخاب شده باشند آنگاه:

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ $\quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ $\quad \bar{P} = \frac{a}{n}$ (a تعداد واحدهایی در نمونه که دارای خصوصیت ویژه ای هستند.)

ویژگی های یک برآوردگر خوب: ۱) نااریبی ۲) سازگاری ۳) کارایی

فرض کنید θ پارامتر مورد مطالعه و $\hat{\theta}$ (برآوردگر θ) برآوردگر آن باشد در این صورت معیارهای فوق را به شکل زیر تعریف می کنیم:

۱) نااریبی: $\hat{\theta}$ را یک برآوردگر نااریب برای θ گوییم هرگاه: $E(\hat{\theta}) = \theta$.

۲) سازگاری: اگر حجم نمونه خیلی زیاد باشد. تراکم / برآوردگر سازگار برآوردگری است که با افزایش حجم نمونه مقدار برآوردگر به مقدار واقعی پارامتر جامعه نزدیک تر می شود به عبارتی اگر $\hat{\theta}_n$ برآوردگر به دست آمده از نمونه ای به حجم n باشد آنگاه $\hat{\theta}_n$ را برای θ سازگار گوییم هرگاه:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon) = 1$$

✓ $\hat{\theta}_n$ و θ خیلی به هم دیگر نزدیک باشند وقتی که حجم نمونه زیاد باشد.

۳) کارایی: کارایی یک مفهوم نسبی است و از بین دو برآوردگر نااریب آنکه واریانس کمتری داشته باشد، کاراتر است.

معیار دیگری که می توان برای مقایسه ی بین برآوردگرها استفاده نمود، معیار MSE (میانگین مربع خطا)

min square Error

Zarrin Barg
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

می باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

فرض کنید $\hat{\theta}_n$ یک برآوردگر برای θ باشد، در این صورت $MSE(\hat{\theta}_n)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$MSE(\hat{\theta}_n) = E(\hat{\theta}_n - \theta)^2$$

نکته: در بین برآوردگرهای مختلف آن که MSE کمتری دارد بهتر است، به عبارتی کاراتر است.

تعریف eff. فرض کنید T_1 و T_2 دو برآوردگر برای θ باشند در این صورت:

$$eff(T_1, T_2) = \frac{\frac{1}{MSE(T_1)}}{1/MSE(T_2)} = \frac{MSE(T_2)}{MSE(T_1)}$$

بنابراین:

$$eff(T_1, T_2) \begin{cases} > 1 \Rightarrow \text{کارایی } T_1 \text{ از } T_2 \text{ کاراتر است.} \\ = 1 \Rightarrow \text{کارایی } T_1 \text{ و } T_2 \text{ یکسان است.} \\ < 1 \Rightarrow T_2 \text{ کاراتر از } T_1 \text{ است.} \end{cases}$$

تعریف. میزان اریبی برآوردگر T برای پارامتر θ را به شکل زیر تعریف می کنیم: $b(T) = E(T) - \theta$

نکته) اگر T برای θ نااریب باشد آنگاه: $b(T) = 0$.

تمرین. ثابت کنید (ک) $\star\ MSE(T) = Var(T) + b^2(T)$

چپ: $= ET^2 - (ET)^2 + (ET)^2 + \theta^2 - 2ET\theta$

راست: $= E(T^2) + \theta^2 - 2E_T\theta = E(T-\theta)^2$

نتیجه) اگر T برای θ نااریب باشد $MSE(T) = Var(T)$

مثال. فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_n$ یک نمونه ی تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد. برآوردگرهای

$$\equiv x_1, x_2, \dots, x_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$$

Zarrin Barg

www.iran-ieee.com

$\star$ کارایی / MSE مهمتر از نااریبی است.

WWW.MOHANDESYAR.COM

Subject:
Year. Month. Date. ( )

✓ پایان ترم ۸-۷ سوال ← اول سخت (مصداق ☆۴، توزیع توام)

$T_1 = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $T_2 = \frac{X_1 + X_n}{2}$ را برای μ در نظر بگیرید. آن ها را از لحاظ نااریبی و کارایی مقایسه کنید. حل

$$E(T_1) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{E(X_i)}_{\mu} = \mu \rightarrow$$ T_1 برای μ نااریب است.

$$E(T_2) = E\left(\frac{X_1+X_n}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{EX_1}_{\mu} + \underbrace{EX_n}_{\mu}\right) = \mu \rightarrow$$ T_2 برای μ نااریب است.

$$MSE(T_1) = Var(T_1) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{\text{مستقل}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \overbrace{Var(X_i)}^{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$MSE(T_2) = Var(T_2) = Var\left(\frac{X_1+X_n}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\underbrace{Var X_1}_{\sigma^2} + \underbrace{Var X_n}_{\sigma^2}\right) = \frac{\sigma^2}{2}$$

بنابراین اگر $n>2$ آنگاه $MSE(T_1) < MSE(T_2)$ و T_1 از T_2 کارآتر است.

☆ تمرین- فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} b(p)$ ، دو برآوردگر $T_1 = \bar{X}$ و $T_2 = \frac{\sum X_i + 1}{n+1}$ را در نظر بگیرید. آن ها را از نظر نااریبی و کارآمدی مورد بررسی قرار دهید. ☆ ← exam یک سوال مشابه

$$E(T_1) = E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \mu \rightarrow$$ T_1 برای μ نااریب است

$$E(T_2) = E\left(\frac{\sum X_i + 1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} E(X_i+1) = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} \underbrace{EX_i}_{\mu} + n\right) = \frac{\mu n + n}{n+1} = \frac{n}{n+1}(\mu+1)$$

$$MSE(T_1) = Var(T_1) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \overbrace{Var(X_i)}^{\sigma^2} \overset{\text{مستقل}}{=} \frac{\sigma^2}{n}$$

$$MSE(T_2) = Var(T_2) = Var\left(\frac{\sum X_i + 1}{n+1}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i+1)\right) \overset{\text{مستقل}}{=} \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i+1) \rightarrow$$

$Var(1) = 0$

$$= \frac{n\sigma^2}{(n+1)^2}$$

$$\frac{n^2}{(n+1)^2} < 1 \Rightarrow \frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} \Rightarrow$$ برای $n>0$ ، T_2 کارآیی از T_1 است.

$\Rightarrow$ T_2 اریب چون کارایی هم تر از نااریبی است.

Zarrin Barg
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

قضیه. اگر $\lim_{n\to\infty} MSE(\hat{\theta}_n)=0$ آنگاه $\hat{\theta}_n$ برای θ سازگار است.

اثبات: بنابه نامساوی چبیشف:

$$P(|\hat{\theta}_n-\theta|>e) \leq \frac{E(\hat{\theta}_n-\theta)^2}{e^2} = \frac{MSE(\hat{\theta}_n)}{e^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}_n-\theta|>e) \leq \lim \frac{MSE(\hat{\theta}_n)}{e^2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}_n-\theta|>e) = 0$$

روش های برآوردیابی.

۱) روش گشتاوری: (MME). ایده‌ی اصلی این روش این است که گشتاورهای نمونه بایستی بتواند گشتاورهای جامعه را توصیف کند.

- گشتاور مرتبه r ام جامعه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $\mu_r = E(X^r)$ $(r=1,2,\dots)$

به طور متناظر گشتاور مرتبه r ام نمونه را به شکل زیر تعریف می‌کنیم: $m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r$

برای استفاده از روش گشتاوری با شروع از $r=1$ گشتاور مرتبه r ام نمونه و جامعه را مساوی هم قرار می‌دهیم، تا جایی که بتوانیم پارامترها را برحسب نمونه‌ی تصادفی بنویسیم.

مثال. فرض کنید $X_1,\dots,X_n \overset{iid}{\sim} P(\lambda)$ برآوردگر گشتاوری λ را به دست آورید.

حل.

$$\left.\begin{array}{l}\mu_1 = E(X) = \lambda \\ m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}\end{array}\right\} \Rightarrow \mu_1 = m_1 \qquad \boxed{\hat{\lambda} = \bar{X}}$$

Zarrin Barg
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۲. فرض کنید $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ ، برآوردهای گشتاوری μ و σ^2 را به دست آورید.

حل.

$$\left.\begin{array}{l} \mu_1 = Ex = \mu \\ m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{X} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\mu} = \bar{X} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \mu_2 = E(X^2) = Var(X) + (EX)^2 = \sigma^2 + \mu^2 \\ m_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \overline{X^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \mu_2 = m_2 \Rightarrow \sigma^2 + \mu^2 = \overline{X^2}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \sigma^2 = \overline{X^2} - \bar{X}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

* ت.

از گشتاور مرتبه ۱ در مرتبه ۲ استفاده کردیم.

تمرین - فرض کنید $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} U(0, \theta)$ برآورد گشتاوری θ را به دست آورید.

(حل)

$$\left.\begin{array}{l} \mu_1 = \frac{\theta + 0}{2} \\ m_1 = \bar{X} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{X} = \frac{\theta}{2} \Rightarrow 2\bar{X} = \theta$$

۲) روش درست نمایی ماکزیمم (MLE). فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با

likely hood!

تابع چگالی (جرم) احتمال $f_\theta(x)$. در این صورت تابع درست نمایی پارامتر θ را برحسب نمونه‌ی فوق به شکل زیر می‌سازیم:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = f_{\theta}(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{ثابت}})$$

متغیر تصادفی

برای به دست آوردن برآوردگر درست نمایی ماکزیمم MLE ی θ باید تابع $L(\theta)$ را ماکزیمم کنیم.

$f' = 0 \Rightarrow \dots$ و بررسی max یا min بودن

نکته) اگر x^* نقطه‌ی ماکزیمم کننده‌ی تابع f و g یک تابع صعودی باشد، آنگاه x^* نقطه‌ی ماکزیمم کننده‌ی تابع $g(f(x))$ نیز هست. و اگر g نزولی بود x^*، min کننده‌ی $g(f(x))$ می‌بود.

$f_\theta(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{متغیر}})$ تابعی از θ (ثابت) تصادفی

Zarrin Barg
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

برای همه توزیع ها چی!؟

نتیجه) نقطه ماکزیمم کننده ی تابع $L(\theta)$ با نقطه ماکزیمم کننده تابع $\ln L(\theta)$ یکسان است.

مثال. فرض کنید $X_1, \dots, X_n \sim Exp(\theta)$ برآوردگر دریست نمایی ماکزیمم θ را به دست آورید.

✓ همه توزیع شناخته شده هم داده شود

حل.

$$X \sim Exp(\theta) \Rightarrow f_\theta(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & x>0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$\Rightarrow L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta x_i} = \theta^n e^{-\theta \times \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\Rightarrow \ln(L(\theta)) = n \ln\theta - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln L(\theta) = \frac{-n}{\theta^2} < 0 \Rightarrow MLE(\theta) = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\bar{X}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mu_1 = 1/\theta \\ m_1 = \bar{X} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\theta} = 1/\bar{X}$$

تمرین - برای همه ی تمرین ها برآوردگرهای MME و MLE را به دست آورده و مقایسه کنید.
کارایی ...

تمرین - فرض کنید $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} U(0,\theta)$ برآوردگرهای گشتاوری و دریست نمایی ماکزیمم θ را محاسبه کنید و آن ها را از لحاظ نااریبی، سازگاری و کارایی مقایسه کنید. ☆ مهم

در تمام مثال هایی که دامنه تغییرات به θ (پارامتر) مربوط است ☆

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} \qquad 0<x<\theta$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta^n} \qquad (0<x_i<\theta)$$

☆ ملاحظه می شود که تابع $L(\theta)$ نسبت به θ یک تابع نزولی است بنابراین Max خود را در ابتدای بازه ی تغییرات θ اختیار می کند.
(به x_i دقت کنید)

$$\left.\begin{array}{l} x_1<\theta \\ \vdots \\ x_n<\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \max(X_1, \dots, X_n) < \theta$$

Zarrin Barg
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ادامه ...

$\Rightarrow MLE\,\theta = \max(X_1, \dots, X_n) = y = T_1 \qquad MME = 2\bar{X} = T_2$ ✓

برای پایان ترم (use)

$E(y) = E(E(y|x))$

$f(x,y) = f(y|x)f(x) = f(x|y)\,f(y)$

* تضمین نوع مصالح ...

$f(x,y) \qquad z = x/y$

$E(\min(X_1 \dots X_n))$

$\max(X_1 \dots X_n)$

طریقه خواندن جدول توزیع نرمال

(توزیع نرمال آمده)

گفته شده

واریانس دو متغیره ـ نامساوی چبیچف ـ مارکوف

قضیه حد مرکزی ـ توزیع t ـ

سیستم توان

سیستم سری

اولین یا کمترین طول عمر

$\max$(عمر مولفه‌ها) از کدام‌ها

$E(\min(X_1, \dots, X_n))$ سری

$\Rightarrow E(\text{سیستم توان}) = E(\max \dots)$

نکته) اگر $X \sim B(n,p)$ که در آن n مقدار بسیار بزرگ $(n>50)$ و p مقدار بسیار کوچک باشد، طوری که $\lambda = np$ آنگاه می‌توان توزیع دوجمله‌ای را با توزیع $P(\lambda)$ تقریب زد.

مثال. فرض کنید $X \sim B(200, 0.01)$ مطلوبست محاسبه‌ی دقیق و تقریبی $P(X=10)$ ؟

دقیق: $P(X=10) = \binom{200}{10}(0.01)^{10}(0.99)^{190}$

تقریبی: $X \approx P(2) \Rightarrow P(X=10) = \dfrac{e^{-2}\,2^{10}}{10!}$

$\left(f(x) = \dfrac{\beta^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}\right) x>0$

حل تمرین: $Z \sim N(0,1) \Rightarrow Z^2 \sim \chi_1^2$

$\chi_1^2 = \Gamma(1/2, 1/2)$

$X \sim \Gamma(\alpha,\beta) \Rightarrow M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} \dfrac{e^{tx}\beta^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}dx = \int_0^{\infty} \dfrac{\beta^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-(\beta-t)}}{\Gamma(\alpha)}dx =$

$= \dfrac{\beta^{\alpha}}{(\beta-t)^{\alpha}} \underbrace{\int_0^{\infty} \dfrac{(\beta-t)^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-(\beta-t)x}}{\Gamma(\alpha)}dx}_{=1} = 000$

$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0 \\ np\to\lambda}} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$; $\lambda = np$ نحوه اثبات گفته

Zarrin Barg
www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$= \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha} \Rightarrow M_{X_1^2}(t) = \left(\frac{1/2}{\frac{1}{2} - t}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{1/2} \quad (1)$$

$$M_{Z^2}(t) = E(e^{tZ^2}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz^2} f_Z(z)\, dz$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \; ; \; z \in \mathbb{R} \Rightarrow M_{Z^2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(1-2t)}{2} z^2}\, dz \quad \star$$

$$\star = \sqrt{\frac{1}{1-2t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1-2t}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2/1-2t}}\, dz = \sqrt{\frac{1}{1-2t}} \quad (2) \quad \underbrace{\left(\sigma^2 = \frac{1}{1-2t}\right)}_{\star}$$

می‌دانیم: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

از (1) و (2) ملاحظه می‌شود که: $M_{Z^2}(t) = M_{X_1^2}(t)$ بنابراین بنابه یکتایی تابع مولد گشتاور نتیجه می‌شود که $Z^2 \sim X_1^2$

اثبات ▲

$$\star \text{ use} \begin{cases} X \sim N(\mu, \sigma^2) \\ f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \end{cases}$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1) \Rightarrow X = \mu + \sigma Z$$

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = E(e^{t(\mu + \sigma Z)}) = E(e^{\mu t} e^{\sigma t Z}) = e^{\mu t} \underbrace{E(e^{\sigma t Z})}_{M_Z(\sigma t)}$$

همیشه یک صفر

$$M_Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tz} e^{-z^2/2}\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2(z^2 - 2tz)}\, dz$$

در نرمال هست پس حفظش می‌کنیم

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-t)^2}{2} + t^2/2}\, dz$$

$$= e^{t^2/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-t)^2}{2}}\, dz}_{\text{توزیع نرمال با } \sigma = 1 \text{ و } \mu = t \text{ است ...}} = e^{t^2/2} \xrightarrow{t \to \sigma t} M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

$$K(t) = \ln M_X(t) = \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}$$

$$K(0) = \sigma^2 \; ?$$

+ تقریب با حد مرکزی

+ $t \to 0$ برای 0 (سمت فرمانه)

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

Subject : ..... Date : / /

نکته ۲) حد مرکزی

$X_1, \dots, X_n \quad EX_i = \mu, \ var X_i = \sigma^2$

(۱) $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \longrightarrow N(0,1)$

$\dfrac{\frac{1}{n}\sum X_i - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{(۲)}{=} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{} N(0,1)$

$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \overset{(۲)}{\Rightarrow} \dfrac{Y - E(Y)}{\sqrt{var Y}} \longrightarrow N(0,1)$

مثال. فرض کنید $X \sim B(n,p)$ مطلوبست محاسبه تقریبی $P(Y=1)$ ؟ و $P(Y \le 1)$ ؟

می‌دانیم $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ که در آن $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} b(p)$

بنابراین بر اساس قضیه حد مرکزی:

$Z = \dfrac{Y - EY}{\sqrt{var Y}} = \dfrac{Y - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{n\to\infty} \underbrace{N(0,1)}_{\text{پیوسته}}$

$P(Y=1) = P\left(Z = \dfrac{1-np}{\sqrt{npq}}\right) = 0$ چون احتمال متغیر تصادفی پیوسته در یک نقطه صفر است.

$P(Y \le 1) = P\left(Z \le \underbrace{\dfrac{1-np}{\sqrt{npq}}}_{-\infty}\right) \overset{n\to\infty}{=} 0$

$P(Y \ge 1) = P\left(Z \ge \dfrac{1-np}{\sqrt{npq}}\right) = 1$

مثال ۲. فرض کنید $X \sim B(100, 0.5)$ مطلوبست محاسبه‌ی $P(X \le 20)$ ؟ (حتی بزرگ ($n=50$ در آمار بی‌نهایت!))

$P(X \le 20) = P\left(\dfrac{X - EX}{\sqrt{var X}} \le \dfrac{20 - EX}{\sqrt{var X}}\right) = P\left(Z \le \dfrac{20-50}{\sqrt{25}}\right) = P\left(Z \le \dfrac{-30}{5}\right)$

$= P(Z \le -6) \approx 0 \qquad Z \sim N(0,1)$

$P(X \le 60) = \dots = P\left(Z \le \dfrac{60-50}{5}\right) = P(Z \le 2) =$ به جدول 0.98

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$E(T_2) = E(2\bar{X}) = E\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{E(X_i)}_{\theta/2} = \theta$$

ادامه‌ی حل تمرین قبل نکته)

$\Rightarrow$ T_2 برای θ نااریب است.

$$MSE(T_2) = var(T_2) = var(2\bar{X}) = Var\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} var(X_i)\right) \overset{\text{مستقل}}{=} \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{var X_i} = \frac{\theta^2}{3n}$$

$$var X = \frac{\theta^2}{3} - \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \theta^2/12$$

(حل کامل برای امتحان نوشته شود)

$$E(T_1) = \int t f_{T_1}(t)\, dt \qquad f_X(x) = \begin{cases} 1/\theta & 0<x<\theta \\ 0 & o.w. \end{cases} \rightarrow f_{T_1}(t) = n f_X(t)\left[F_X(t)\right]^{n-1}$$

$$\underset{P(X\le t)}{F_X(t)} = \int_0^t f_X(x)\,dx = \int_0^t 1/\theta\, dx = t/\theta \Rightarrow f_{T_1}(t) = \frac{n\times 1}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^n = \frac{n t^{n-1}}{\theta^n} ; \underbrace{0<t<\theta}$$

چون $0<x_i<\theta$ پس $0<\max x_i<\theta$

$$\Rightarrow E(T_1) = \int_0^\theta t\,\frac{n t^{n-1}}{\theta^n}\,dt = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta t^n dt = \frac{n\theta}{n+1}$$

$$\xrightarrow{\text{میزان اریبی } T_1} b(T_1) = E(T_1) - \theta = \frac{n\theta}{n+1} - \theta = \frac{-\theta}{n+1}$$

$$E(T_1^2) = \int_0^\theta t^2 f_{T_1}(t)\,dt = \int_0^\theta t^2 \frac{n t}{\theta^n}\,dt = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta t^{n+1}\,dt = \frac{n}{\theta^n}\,\frac{\theta^{n+2}}{n+2}$$

$$= \frac{n\theta^2}{n+2}$$

$$Var(T_1) = \frac{n\theta^2}{n+2} - \left(\frac{n\theta}{n+1}\right)^2 = \frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2}\,\theta^2$$

$$\Rightarrow MSE(T_1) = \left[\frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right]\theta^2 = \left[\frac{n(n+1)^2 - (n+2)(n^2-1)}{(n+2)(n+1)^2}\right]\theta^2$$

$= \dots$ (ساده‌ی)

$$\overset{?}{\Rightarrow} MSE(T_1) < MSE(T_2)$$

در MSE میزان اریبی هم تاثیر دارد

www.iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

ج همیشه نمی‌توان از $P(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{x-\mu}{\sigma})$ استفاده کرد باید اول توجیه شود.

مثال. فرض کنید X دارای توزیع $X \sim \chi^2(n)$ باشد، مطلوبست محاسبه‌ی $P(X>2)$ با استفاده از تقریب نرمال:

حل. با توجه به آنکه $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ که در آن $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} \chi^2(1)$ بنابراین با استفاده از قضیه حد مرکزی (یا با استفاده از رابطه (**)) می‌توانیم از تقریب زیر استفاده کنیم:

$$\frac{X - EX}{\sqrt{Var(X)}} = \frac{X-n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} N(0,1)$$

در نتیجه:

$$P(X>2) = P\left(\frac{X-n}{\sqrt{2n}} > \frac{2-n}{\sqrt{2n}}\right) = P\left(Z > \frac{2-n}{\sqrt{2n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(Z > -\infty) = 1$$

+ پاورقی

محاسبه دقیق مثال اول صفحه: $\dots = \int_2^\infty \frac{x^{n/2-1} e^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \dots \leftarrow$

Zarrin Barg
Iran-ieee.com

WWW.MOHANDESYAR.COM

برنولی : X : تعداد موفقیت در یک آزمایش — $p^x(1-p)^{1-x}$

دوجمله‌ای : X : تعداد موفقیت در n آزمایش — $\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

هندسی : X : تعداد آزمایش لازم تا حصول اولین موفقیت — $p(1-p)^{x-1}$

پاسکال : X : تعداد آزمایش لازم تا حصول r امین موفقیت — $\binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}$

پواسون : $\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$

(فرونه) r امین گشتاور حول مبدا توزیع گاما : $\mu'_r = \dfrac{(1/\theta)^r \Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}$

www.iran-ieee.com